**Определение 1.** Рядом Лорана с центром в точке $a \in \mathbb{C}$ называется ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \tag{1}$$

понимаемый как сумма двух рядов:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \tag{2}$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n = \sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m}(z-a)^{-m}. \tag{3}$$

Ряд (2) является обычным степенным рядом и в силу теоремы Абеля (теорема 1 § 9) областью его сходимости является некоторый круг $B_R(a)$, где $R$ — радиус сходимости ряда (2). Ряд (3) заменой $\frac{1}{z-a} = \zeta$ приводится к степенному ряду $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} c_{-m}\zeta^m$, и по той же теореме Абеля его область сходимости — тоже некоторый круг $|\zeta| < \alpha_0$. Следовательно, ряд (3) сходится в области $|z-a| > \frac{1}{\alpha_0} \triangleq \rho \geqslant 0$. Если $\rho > R$, то суммарный ряд (1) не сходится ни в одной точке, если же $\rho < R$, то ряд (1) сходится в кольце: $\rho < |z-a| < R$.

В последнем случае кольцо $\rho < |z-a| < R$, где $R$ — радиус сходимости ряда (2), а $\frac{1}{\rho}$ — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} c_{-m}\zeta^m$, называется *кольцом сходимости ряда Лорана* (1).

По теореме Абеля ряд (2) сходится равномерно в $\overline{B_{R_1}(a)}$ при $R_1 \in (0, R)$, а ряд (3) сходится равномерно на множестве $|z-a| \geqslant \rho_1$ при $\rho_1 > \rho$. Следовательно, ряд Лорана сходится равномерно в любом кольце

$$\rho_1 \leqslant |z-a| \leqslant R_1, \quad \text{где} \quad \rho < \rho_1 < R_1 < R.$$

Таким образом, по определению 3 из § 9 ряд Лорана (1) сходится *равномерно строго внутри* его кольца сходимости. Так как к тому же каждый член ряда (1) в кольце сходимости является регулярной функцией, то по теореме Вейерштрасса (теорема 3 § 9) сумма ряда Лорана в кольце сходимости также является регулярной функцией, причем ряд Лорана в этом кольце можно почленно дифференцировать любое число раз.

Имеет место и обратное утверждение, а именно,

**Теорема 1 (Лорана–Вейерштрасса).** *Всякая функция* $w = f(z)$, *регулярная в кольце* $\rho < |z-a| < R$, *где* $0 \leqslant \rho < R \leqslant +\infty$, *представима в этом кольце суммой сходящегося ряда Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

*коэффициенты которого определяются по формулам*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta, \quad \text{где } r \in (\rho, R), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

*причем ориентация окружности* $\gamma_r \stackrel{\triangle}{=} \{\zeta \mid |\zeta - a| = r\}$ *положительная, т. е. обход производится против хода часовой стрелки.*

Доказательство.

1. Покажем, что каждый коэффициент $c_n$ в формуле (4) не зависит от выбора $r \in (\rho, R)$. Функция $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$ регулярна в кольце $\rho < |\zeta - a| < R$. Для любых чисел $r_1, r_2$: $\rho < r_1 < r_2 < R$ определим окружности $\gamma_k$ с центром в точке $a$ и радиуса $r_k$, $k \in \overline{1,2}$, ориентированные положительно. По обобщенной теореме Коши (теорема 3 § 7) получаем равенство

$$\int_{\gamma_2 \cup \gamma_1^{-1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta = 0, \quad \text{т. е.}$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta = \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta,$$

что и требовалось для доказательства независимости интеграла (4) от выбора $r \in (\rho, R)$ при каждом $n \in \mathbb{Z}$.

2. Зафиксируем произвольную точку $z_0$ в кольце $\rho < |z-a| < R$. Выберем числа $r_1, r_2$ такие, что $\rho < r_1 < |z_0 - a| < r_2 < R$, и окружности $\gamma_k = \{z \mid |z-a| = r_k\}$ при $k \in \overline{1,2}$, ориентированные положительно. Тогда контур $\Gamma = \gamma_2 \cup \gamma_1^{-1}$, является границей кольца $r_1 < |z-a| < r_2$, в котором по интегральной формуле Коши (теорема 1 § 8) получаем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta \stackrel{\triangle}{=} I_2 + I_1. \tag{5}$$

Рассмотрим интеграл $I_2$ из равенства (5). Повторяя рассуждения доказательства теоремы 2 § 9, для всех $\zeta \in \gamma_2$ получаем сумму геометрической прогрессии (см. пример 1 § 9) вида

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)\left(1 - \dfrac{z_0 - a}{\zeta - a}\right)} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z_0 - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}f(\zeta). \qquad (6)$$

Из справедливости оценки

$$\left|f(\zeta)\frac{(z_0 - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}\right| \leqslant q_2^n \cdot \frac{M}{r_2}, \quad \forall\, \zeta \in \gamma_2,$$

где $q_2 \stackrel{\triangle}{=} \frac{|z_0 - a|}{r_2} < 1$, $M \stackrel{\triangle}{=} \sup\{|f(z)| \;\big|\; r_1 \leqslant |z - a| \leqslant r_2\} < +\infty$, и из того, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_2^n$ сходится, по признаку Вейерштрасса получаем, что ряд (6) сходится абсолютно и равномерно на $\gamma_2$. По теореме 2 из § 6 ряд (6) можно почленно интегрировать по $\gamma_2$, т. е. получим, что

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,dz \stackrel{(6)}{=}$$

$$\stackrel{(6)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\,d\zeta \cdot (z_0 - a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z_0 - a)^n, \qquad (7)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\,d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (8)$$

3. Рассмотрим интеграл $I_1$ из (5). Представим $-\frac{1}{\zeta - z_0}$ в виде ряда (см. пример 1 § 9)

$$-\frac{1}{\zeta - z_0} = \frac{1}{(z_0 - a)\left(1 - \dfrac{\zeta - a}{z_0 - a}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\zeta - a)^n}{(z_0 - a)^{n+1}}. \qquad (9)$$

По признаку Вейерштрасса ряд (9) сходится равномерно по $\zeta$ на $\gamma_1$, так как

$$\left|\frac{\zeta - a}{z_0 - a}\right| = \frac{r_1}{|z_0 - a|} \stackrel{\triangle}{=} q_1 < 1, \quad \forall\, \zeta \in \gamma_1.$$

Так как $|f(\zeta)| \leqslant M$ при $\zeta \in \gamma_1$, то ряд

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)(\zeta - a)^n}{(z_0 - a)^{n+1}}, \quad \zeta \in \gamma_1, \qquad (10)$$

также сходится равномерно на $\gamma_1$, и аналогично случаю вычисления $I_2$ его можно почленно интегрировать. После интегрирования равенства (10) получаем

$$I_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta - a)^n \, d\zeta \right) \frac{1}{(z_0 - a)^{n+1}}. \tag{11}$$

Заменяя в формуле (11) номера $(n+1)$ на $(-m)$, получаем равенство

$$I_1 = \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m (z_0 - a)^m, \tag{12}$$

где

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{m+1}} \, d\zeta, \quad m = -1, -2, \ldots \tag{13}$$

В силу пункта 1) в формулах (8), (13) контуры $\gamma_1$, $\gamma_2$ можно заменить на любую окружность $\gamma_r = \{z \mid |z - a| = r\}$, где $\rho < r < R$, т. е. верна общая формула коэффициентов (4). Так как точка $z_0$ была выбрана в данном кольце произвольно, то, складывая ряды (7) и (12), получаем ряд Лорана с коэффициентами (4), сходящийся во всем кольце $\rho < |z - a| < R$. ■

**Следствие 1.** *Если функция $f : B_R(a) \to \mathbb{C}$ регулярна на $B_R(a)$, то ее ряд Лорана с центром в точке $a$ совпадает с ее рядом Тейлора с центром в точке $a$.*

В самом деле, по формуле (4) при $m = -1, -2, \ldots$ функция $f(\zeta)(\zeta - a)^{-m-1}$ будет регулярной в круге $B_R(a)$, и по теореме Коши интеграл от нее по замкнутому контуру равен нулю, т. е. $c_m = 0$ $\forall\, m = -1, -2, \ldots$. ■

**Теорема 2 (о единственности разложения в ряд Лорана).** *Разложение регулярной в кольце $\rho < |z - a| < R$ функции $f$ в сходящийся ряд Лорана с центром в точке $a$ единственно.*

Доказательство. Пусть регулярная функция $f$ представлена в кольце $\rho < |z - a| < R$ в виде некоторого ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n (z - a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - a)^n. \tag{14}$$

Выберем число $r \in (\rho, R)$, и пусть окружность $\gamma_r = \{z \mid |z - a| = r\}$ ориентирована положительно. Как показано в примере 1 § 6, справедлива формула

$$I_k \triangleq \int_{\gamma_r} \frac{dz}{(z - a)^{k+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & k = 0, \\ 0, & k = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases} \tag{15}$$

Как было отмечено в начале параграфа, ряд (14) на окружности $\gamma_r$ сходится равномерно. Зафиксируем любое число $k \in \mathbb{Z}$. Умножив ряд (14) на ограниченную по модулю на кривой $\gamma_r$ функцию $\frac{1}{2\pi i(z-a)^{k+1}}$, получаем равномерно сходящийся на окружности $\gamma_r$ ряд

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} b_n \frac{(z-a)^n}{(z-a)^{k+1}}. \tag{16}$$

Следовательно, по теореме 2 из § 6 его можно почленно интегрировать по окружности $\gamma_r$, и, учитывая формулу (4), получаем

$$c_k \overset{(4)}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz \overset{(16)}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i}\, b_n \int_{\gamma_r} \frac{dz}{(z-a)^{k-n+1}} \overset{(15)}{=} b_k,$$

т. е. ряд (14) совпадает с рядом Лорана (1), (4). ■

Из следствия 1 и теоремы 2 получаем

**Следствие 2.** *Представление регулярной функции* $f : B_R(a) \to \mathbb{C}$ *в виде сходящегося степенного ряда по степеням* $(z-a)$ *единственно. Оно совпадает с рядом Тейлора этой функции с центром в точке* $a$.