Определение 1. Пусть функция f не регулярна в точке $a \in \overline{\mathbb{C}}$, но регулярна в некоторой проколотой окрестности этой точки a (т. е. на множестве $\overset{\circ}{B}_\rho(a)$, $\rho > 0$). Тогда точку a называют *изолированной особой точкой (однозначного характера) функции* f.

В определении 1 точка a может быть как конечной точкой (тогда $\overset{\circ}{B}_\rho(a) = \{z \mid 0 < |z - a| < \rho\}$), так и бесконечной (тогда $\overset{\circ}{B}_\rho(\infty) = \{z \mid |z| > \rho\}$).

В зависимости от поведения функции f около особой точки будем различать три типа особых точек.

Определение 2. Изолированная особая точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ функции $f : \overset{\circ}{B}_\rho(a) \to \mathbb{C}$ называется

1) *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$;

2) *полюсом*, если существует $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$;

3) *существенно особой точкой*, если не существует конечного или бесконечного предела $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

В случае, когда особая точка a конечна, регулярную в кольце $\overset{\circ}{B}_\rho(a)$ функцию f по теореме 1 § 11 можно представить в виде сходящегося ряда Лорана с центром в точке a, т. е.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in \overset{\circ}{B}_\rho(a). \tag{1}$$

Тогда будем различать две части ряда Лорана

$$I_{\text{пр}} \triangleq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{и} \quad I_{\text{гл}} \triangleq \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n,$$

которые называют соответственно *правильной и главной частями ряда Лорана* (1) с центром в особой точке a.

В случае, когда особая точка $a = \infty$, функцию f можно представить в виде сходящегося в кольце $\overset{\circ}{B}_\rho(\infty)$ ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad z \in \overset{\circ}{B}_\rho(\infty), \tag{2}$$

и теперь будем различать части ряда (2)

$$I_{\text{пр}} \triangleq \sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n \quad \text{и} \quad I_{\text{гл}} \triangleq \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n,$$

которые называются соответственно *правильной и главной частями ряда Лорана* (2) с центром в ∞.

Теорема 1. *Пусть точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ есть изолированная особая точка функции f. Пусть функция f представлена своим рядом Лорана с центром в точке a.*

1) Для того, чтобы точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ была устранимой особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана отсутствовала (т. е. $I_{гл}(z) \equiv 0$).

2) Чтобы точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ была полюсом, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана $I_{гл}(z)$ содержала конечное число ненулевых слагаемых.

3) Чтобы точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ была существенно особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана $I_{гл}(z)$ содержала бесконечное число ненулевых слагаемых.

Доказательство.

I. Пусть точка $a \in \mathbb{C}$ конечна.

1. *Необходимость.* Пусть a — устранимая особая точка функции f, т. е. существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)$. Тогда функция f ограничена в некоторой окрестности точки a, т. е. существуют числа $\rho_1 \in (0, \rho)$ и $A > 0$ такие, что $|f(z)| < A$ при $\forall z \in \overset{\circ}{B}_{\rho_1}(a)$.

Воспользуемся неравенством Коши для коэффициентов ряда Лорана функции f (см. следствие 3 § 11)

$$|c_n| \leqslant \frac{A}{r^n}, \quad \forall\, r \in (0, \rho_1).$$

Для каждого целого $n < 0$ получаем, что $|c_n| \leqslant A \cdot r^{|n|} \to 0$ при $r \to \to 0$, т. е. $c_n = 0$ для всех $n < 0$, т. е. $I_{\text{гл}}(z) \equiv 0$.

2. *Достаточность.* Пусть $I_{\text{гл}}(z) \equiv 0$, т. е. $c_n = 0 \ \ \forall\, n < 0$. Тогда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \overset{\triangle}{=} S(z), \ \ \forall\, z \in \overset{\circ}{B}_\rho(a)$.

Так как сумма сходящегося степенного ряда $S(z)$ есть регулярная функция на круге $B_\rho(a)$, причем $f(z) = S(z)$ при $z \neq a$, то существует предел

$$\lim_{z\to a} f(z) = S(a) = c_0.$$

3. *Необходимость.* Пусть точка a — полюс функции f, т. е. существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$. В силу этого можно выбрать $\delta > 0$ такое, что при всех $z \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$ справедливо неравенство $|f(z)| > 1$. Определим функцию $g(z) \overset{\triangle}{=} \frac{1}{f(z)}$ при $z \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$.

Очевидно, что функция g регулярна в проколотой окрестности $\overset{\circ}{B}_\delta(a)$, причем $g(z) \neq 0$ и $|g(z)| < 1$ при всех $z \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$. Так как точка a есть полюс функции f, то существует предел $\lim\limits_{z\to a} g(z) = = \lim\limits_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0$, т. е. получаем, что точка a есть устранимая особая точка функции g. Следовательно, доопределив $g(a) = 0$, получаем, что функция g регулярна в круге $B_\delta(a)$, т. е. по теореме 2 из § 9 она представима в виде сходящегося степенного ряда

$$g(z) = b_m (z-a)^m + b_{m+1}(z-a)^{m+1} + \ldots, \quad \forall\, z \in B_\delta(a). \tag{3}$$

Так как функция $g(z) \not\equiv 0$, в равенстве (3) существует номер $m \geqslant \geqslant 1$, при котором $b_m \neq 0$. Таким образом, $g(z) = (z-a)^m h(z)$, где $h(z) = b_m + b_{m+1}(z-a) + \ldots$, т. е. функция h как сумма сходящегося степенного ряда регулярна в круге $B_\delta(a)$, причем $h(a) \neq 0$. Поэтому $h(z) \neq 0$ при всех z из некоторой окрестности $B_{\rho_1}(a)$, где $0 < \rho_1 < \delta$. Следовательно, функция $\frac{1}{h(z)}$ тоже регулярна в $B_{\rho_1}(a)$, и по теореме 2 из § 9 она также представима в виде сходящегося степенного ряда

$$\frac{1}{h(z)} = d_0 + d_1(z-a) + d_2(z-a)^2 + \ldots, \quad z \in B_{\rho_1}(a),$$

причем здесь $d_0 = \frac{1}{b_m} \neq 0$. В итоге получаем в $\overset{\circ}{B}_{\rho_1}(a)$

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-a)^m} \cdot \frac{1}{h(z)} = \frac{d_0}{(z-a)^m} + \frac{d_1}{(z-a)^{m-1}} + \\ + \ldots + \frac{d_{m-1}}{(z-a)} + d_m + d_{m+1}(z-a) + \ldots . \quad (4)$$

Таким образом, правая часть в равенстве (4) есть ряд Лорана функции f с центром в точке a, причем главная часть $I_{\text{гл}}(z)$, очевидно, содержит конечное число ненулевых слагаемых.

Достаточность. Пусть справедливо представление функции f в проколотой окрестности $\overset{\circ}{B}_{\rho_1}(a)$ в виде сходящегося ряда Лорана (4), причем $d_0 \neq 0$. Тогда, вынося общий множитель, получаем

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}(d_0 + d_1(z-a) + \ldots) = \frac{p(z)}{(z-a)^m}. \quad (5)$$

В формуле (5) функция p как сумма сходящегося степенного ряда регулярна в круге $B_{\rho_1}(a)$ и $\lim\limits_{z \to a} p(z) = p(a) = d_0 \neq 0$. С другой стороны $\frac{1}{(z-a)^m} \to \infty$ при $z \to a$. Отсюда получаем, что $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$.

4. *Эквивалентность* покажем методом исключения. Предел может существовать в $\overline{\mathbb{C}}$ или не существовать. У главной части ряда $I_{\text{гл}}(z)$ может быть конечное число слагаемых или бесконечное. Эквивалентность существования предела в $\overline{\mathbb{C}}$ и конечности числа ненулевых слагаемых в ряде $I_{\text{гл}}(z)$ уже доказаны в пп. 1) и 2). Следовательно, если не существует предела функции f, то это эквивалентно бесконечному числу слагаемых в $I_{\text{гл}}(z)$.

$\underline{\underline{\text{II}}}$. Пусть функция f имеет особую точку $a = \infty$. Заменой аргумента $\zeta = \frac{1}{z}$ приходим к функции $\widetilde{f}(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, у которой особой точкой является точка $\zeta = 0$, причем существование предела функции $\widetilde{f}(\zeta)$ в точке $\zeta = 0$ эквивалентно существованию предела функции $f(z)$ в ∞, т. е. тип особой точки $a = \infty$ у функции $f(z)$ и тип особой точки $\zeta = 0$ у функции $\widetilde{f}(\zeta)$ одинаков. В свою очередь, главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ с центром в точке ∞ при замене аргумента переходит в главную часть ряда Лорана функции $\widetilde{f}(\zeta)$ с центром в точке $\zeta = 0$. Так как необходимое соответствие в конечной точке $\zeta = 0$ уже установлено в пункте I, то это влечет требуемое соответствие при $a = \infty$. ■