§ 13. Теория вычетов

Определение 1. Пусть $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка регулярной функции $f : \overset{\circ}{B}_\rho(a) \to \mathbb{C}$, $\rho > 0$. Пусть $\gamma_r \overset{\triangle}{=} \{z \mid |z-a| = r\}$ — положительно ориентированная окружность, причем $0 < r < \rho$. Тогда *вычетом функции f в точке a* называется число

$$\operatorname*{res}_a f \overset{\triangle}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz. \tag{1}$$

Отметим, что в формуле (1) интеграл не зависит от величины $r \in (0, \rho)$.

Для получения более удобных выражений вычисления вычета функции, представим функцию $f : \overset{\circ}{B}_\rho(a) \to \mathbb{C}$ ее рядом Лорана с центром в точке a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n. \tag{2}$$

Тогда по формуле (4) § 11 для коэффициентов c_n получаем, что интеграл (1) равен коэффициенту c_{-1}, т. е.

$$\operatorname*{res}_a f = c_{-1}. \tag{3}$$

Приведем некоторые правила вычисления вычетов.

Лемма 1. *Пусть a — полюс функции f порядка $m \leqslant m_0$. Тогда справедлива формула*

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{(m_0-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{m_0-1}}{dz^{m_0-1}} \left[(z-a)^{m_0} f(z)\right]. \tag{4}$$

Доказательство. Представим функцию f в виде ряда Лорана (2) с центром в полюсе a порядка m. Так как число $m_0 \geqslant m$, то в ряде (2) коэффициенты $c_n = 0$ при всех $n < -m_0$. Итак,

$$f(z) = \frac{c_{-m_0}}{(z-a)^{m_0}} + \frac{c_{-m_0+1}}{(z-a)^{m_0-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots. \tag{5}$$

Умножая ряд (5) на $(z-a)^{m_0}$, получаем

$$(z-a)^{m_0} f(z) = c_{-m_0} + c_{-m_0+1}(z-a) + \ldots + \\ + c_{-1}(z-a)^{m_0-1} + \ldots, \quad z \in \overset{\circ}{B}_\rho(a). \tag{6}$$

Так как полученный в правой части равенства (6) степенной ряд сходится в $B_\rho(a)$, то по теореме Абеля (теорема 1 § 9) он сходится абсолютно и равномерно внутри области $B_\rho(a)$. Поэтому по теореме Вейерштрасса (теорема 3 § 9) его можно почленно дифференцировать $(m_0 - 1)$ раз, после чего получаем

$$\frac{d^{m_0-1}}{dz^{m_0-1}} \left[(z-a)^{m_0} f(z)\right] = \\ = (m_0-1)! c_{-1} + m_0! c_0 (z-a) + \ldots, \quad z \in \overset{\circ}{B}_\rho(a). \tag{7}$$

Левая часть равенства (7), очевидно, имеет предел при $z \to a$. Поэтому, переходя к пределу, в силу формулы (3) получаем формулу (4). ■

Лемма 2. *Пусть функция* $f : \overset{\circ}{B}_\rho(a) \to \mathbb{C}$ *представима в виде*

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad z \in \overset{\circ}{B}_\rho(a),$$

где функции P и Q регулярны в круге $B_\rho(a)$, причем

$$P(a) \neq 0, \qquad Q(a) = 0, \qquad Q'(a) \neq 0. \tag{8}$$

Тогда справедлива формула

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{P(a)}{Q'(a)}. \tag{9}$$

Доказательство. В самом деле, в силу условия (8) точка a — полюс 1-го порядка функции f и по формуле (4) получаем

$$\operatorname*{res}_a f = \lim_{z\to a}\left[\frac{P(z)(z-a)}{Q(z)}\right] = \lim_{z\to a}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(a)}{z-a}} = \frac{P(a)}{Q'(a)}. \qquad \blacksquare$$

Определение 2. Пусть функция $f : \overset{\circ}{B}_{R_0}(\infty) \to \mathbb{C}$ регулярна (число $R_0 \geqslant 0$). Тогда *вычетом функции f в бесконечности* называется число

$$\operatorname*{res}_\infty f \triangleq \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R^{-1}} f(z)\,dz, \tag{10}$$

где число $R > R_0$, а окружность $\gamma_R{}^{-1} = \{z \mid |z| = R\}$ ориентирована движением по ходу часовой стрелки (рис. 1) (т. е. отрицательно).

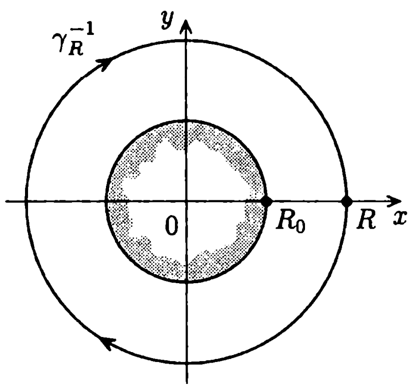

Рис. 1

Аналогично случаю конечной точки оценим $\operatorname*{res}_\infty f$ через ряд Лорана для функции f в окрестности $\overset{\circ}{B}_{R_0}(\infty)$, учитывая, что его коэффициенты имеют вид

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

где окружность γ_R при $R > R_0$ ориентирована движением против хода часовой стрелки. Сравнивая выражения (11) и (10), убеждаемся в справедливости формулы

$$\operatorname*{res}_\infty f = -c_{-1}, \tag{12}$$

где c_{-1} — коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в бесконечности. Здесь появился знак минус за счет различной ориентации окружности γ_R в формулах (11) и (10).

Лемма 3. *Пусть ∞ — устранимая точка функции f. Тогда $\operatorname*{res}_{\infty} f$ можно вычислить по формуле*

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = \lim_{z\to\infty} \left[z\left(f(\infty) - f(z)\right)\right]. \tag{13}$$

Доказательство. Из условия леммы следует, что ряд Лорана в некоторой окрестности $\overset{\circ}{B}_{R_0}(\infty)$ имеет вид

$$f(z) = f(\infty) + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots,$$

т. е.

$$z\left(f(\infty) - f(z)\right) = -c_{-1} - \frac{c_{-2}}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right),$$

что в пределе при $z \to \infty$ дает формулу (13). ■

Теорема 1 (Коши о вычетах). *Пусть дана область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ (см. определения 1, 2 из § 7). Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что все a_k различны и если $\infty \in G$, то $\infty = a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{a_k} f. \tag{14}$$

Доказательство.

1. Пусть область G ограничена. Так как число особых точек $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ конечно, то существует число $r > 0$ такое, что $B_r(a_k) \subset \subset G\ \forall\, k \in \overline{1,n}$, причем замыкания этих кругов попарно не пересекаются. Определим множество $\widetilde{G} \triangleq G \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{B_r(a_k)}\right)$.

Множество $\widetilde{G}$ тоже является областью с кусочно-гладкой границей $\widetilde{\Gamma} = \Gamma \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} {\gamma_k}^{-1}\right)$, где γ_k суть окружности $\left\{z \,\middle|\, |z - a_k| = r\right\}$, ориентированные движением против хода часовой стрелки, а ${\gamma_k}^{-1}$ — они же, но ориентированные по ходу часовой стрелки. Получили, что f регулярна на $\widetilde{G}$ и непрерывна на $\overline{\widetilde{G}} = \widetilde{G} \cup \widetilde{\Gamma}$ (см. рис. 2). Тогда по теореме 3 из § 7 получаем

$$0 = \int_{\widetilde{\Gamma}} f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz \overset{(1)}{=} \int_\Gamma f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \operatorname*{res}_{a_k} f,$$

что и дает формулу (14).

2. Пусть $\infty \in G$. Тогда особые точки $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ — конечны, а $a_n = \infty$. Так как по определению 1 § 7 граница Γ состоит из ограниченных гладких компонент, то существует число $R > 0$ такое, что для каждого $z \in \Gamma \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} a_k\right)$ справедливо неравенство $|z| < R$.

Определим $\widetilde{G} = G \cap B_R(0)$. Тогда $\widetilde{G}$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\widetilde{\Gamma} = \Gamma \cup \gamma_R$, где $\gamma_R = \{z \mid |z| = R\}$ — окружность, ориентированная движением против хода часовой стрелки (см. рис. 3). Для регулярной в $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$ функции f по определению 2 справедлива формула

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz. \tag{15}$$

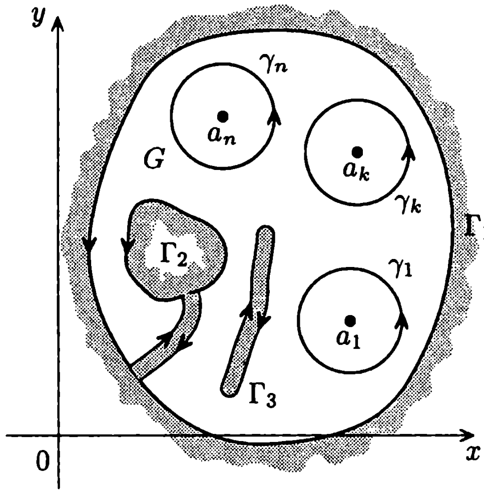

Рис. 2

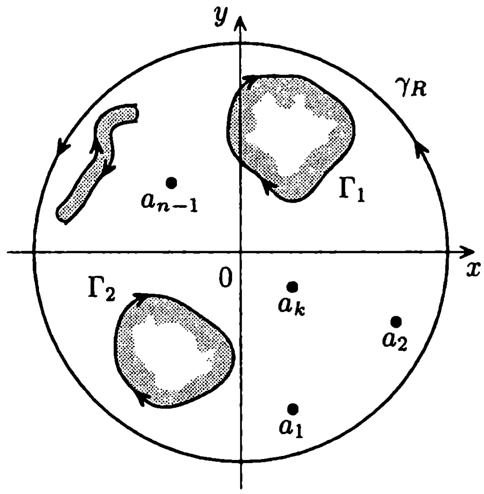

Рис. 3

Так как область $\widetilde{G}$ ограничена, то, опираясь на результат пункта 1), получаем

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname*{res}_{a_k} f. \tag{16}$$

С другой стороны,

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} f(z)\, dz = \int_{\Gamma} f(z)\, dz + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz \overset{(15)}{=} \int_{\Gamma} f(z)\, dz - 2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f,$$

откуда и из (16) следует (14). ■

Следствие 1. *Пусть функция f регулярна во всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, \ldots, a_n \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{a_k} f = 0. \tag{17}$$

Функция f имеет полюсы 1-го порядка (нули знаменателя) в точках $z_k = e^{i(\pi/4+\pi k/2)}$, $k = 0, 1, 2, 3$, причем точки z_0 и z_1 лежат внутри контура γ_R.

По теореме 1 о вычетах получаем

$$J_R = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z_0} f + \operatorname*{res}_{z_1} f\right) = 2\pi i \left[\frac{1 + e^{i\frac{2\pi}{4}}}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1 + e^{2i\frac{3\pi}{4}}}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}}\right] =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{2i} \cdot \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} + \frac{1}{-2i} \cdot \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2}\right] =$$

$$= \pi\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\right) = \pi\sqrt{2}.$$

С другой стороны

$$J_R = \int_{-R}^{+R} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz \triangleq I_R^1 + I_R^2.$$

Очевидно, что интеграл $I_R^1 \to J$ при $R \to +\infty$. Позже (см. лемму 4) мы докажем, что интеграл $I_R^2 \to 0$ при $R \to +\infty$, откуда в итоге получим, что $J = \pi\sqrt{2}$.

Обобщая пример 2, изучим правила вычисления интегралов различных типов с помощью теории вычетов.

I. Вычисление интегралов вида

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{n,m}(x)\,dx, \tag{19}$$

где $R_{n,m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ — рациональная функция,

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0,$$
$$Q_m(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0,$$

причем полагаем, что $Q_m(x) \neq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^1$.

Известно, что интеграл J (19) сходится при условии $m > n + 1$, что считаем выполненным.

Для вычисления интеграла (19), как и в примере 2, определим ориентированный движением против хода часовой стрелки контур $\gamma_R \triangleq [-R, R] \cup C_R$, где $R > R_0 = \max\{|z_k^+| \mid k \in \overline{1, l}\}$, а $\{z_k^+\}_{k=1}^l$ — совокупность всех различных нулей многочлена $Q_m(z)$, лежащих в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, полуокружность $C_R \triangleq \{z \mid |z| = R, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. Чтобы воспользоваться теоремой о вычетах, определим интеграл

$$J_R = \int_{\gamma_R} R_{n,m}(z)\,dz.$$

По теореме 1 о вычетах, при каждом $R > R_0$

$$J_R = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{l} \operatorname*{res}_{z_k^+} R_{n,m} \right).$$

С другой стороны, имеет место представление интеграла $J_R = J_R^1 + J_R^2$, где

$$J_R^1 \triangleq \int_{-R}^{+R} R_{n,m}(x)\,dx, \qquad J_R^2 \triangleq \int_{C_R} R_{n,m}(z)\,dz. \tag{20}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{R\to+\infty} J_R^1 = J$. Осталось показать, что $\lim\limits_{R\to+\infty} J_R^2 = 0$, откуда последует формула:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{n,m}(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{l} \operatorname*{res}_{z_k^+} R_{n,m}. \tag{21}$$

Докажем необходимое утверждение.

Лемма 4. *Пусть* $\Phi(z)$ *— непрерывная функция на замкнутом множестве* $\{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0,\ |z| \geqslant R_0 > 0\}$. *Пусть* $C_R \triangleq \{z \mid |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, $R > R_0$, *— семейство полуокружностей в верхней полуплоскости. Обозначим*

$$\varepsilon(R) \triangleq \max\left\{|\Phi(z)| \;\middle|\; z \in C_R\right\} \quad \textit{при} \quad R > R_0.$$

Если $\lim\limits_{R\to+\infty} \varepsilon(R)R = 0$, *то* $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{C_R} \Phi(z)\,dz = 0$.

Доказательство. Из условий леммы получаем оценки

$$\left| \int_{C_R} \Phi(z)\,dz \right| \leqslant \int_{C_R} |\Phi(z)||dz| \leqslant \varepsilon(R) \int_{C_R} |dz| = \varepsilon(R)\pi R \to 0. \quad \blacksquare$$

Применим лемму 4 для случая рациональной функции $\Phi(z) = R_{n,m}(z)$ из правого интеграла в (20) при сформулированных выше условиях (т. е. при $m > n+1$).

При достаточно больших $|z| > R_0$ очевидно справедлива оценка $|\Phi(z)| \leqslant 2|z|^{n-m}$, т. е. $\varepsilon(R)R \leqslant 2R^{n-m+1} \to 0$, откуда следует, что выполнены условия леммы 4, по которой получаем равенство $\lim\limits_{R\to+\infty} J_R^2 = 0$.

Таким образом, формула (21) обоснована полностью.

II. Вычисление интегралов вида

$$J = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi, \tag{22}$$

где $R(x,y) = \frac{P_n(x,y)}{Q_m(x,y)}$; P_n, Q_m — многочлены переменных x и y.

Сделаем замену $z = z(\varphi) = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Тогда $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$; $\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$, $dz = ie^{i\varphi}\,d\varphi$, т. е.

$$J = \int_0^{2\pi} R\left(\frac{z(\varphi)}{2} + \frac{1}{2z(\varphi)},\ \frac{z(\varphi)}{2i} - \frac{1}{2iz(\varphi)}\right) \cdot \frac{z'(\varphi)}{iz(\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} R_1(z)\,dz.$$

В итоге интеграл (22) свелся к интегралу по кругу $|z| = 1$ от рациональной функции $R_1(z)$, который легко может быть вычислен с помощью теоремы 1 о вычетах.

III. Вычисление интегралов вида

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} R(x)\,dx, \qquad (23)$$

где $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ — рациональная функция, причем $m - n \geqslant 1$, α — действительное число, $\alpha > 0$ и $Q_m(x) \neq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^1$ (т. е. интеграл (23) есть преобразование Фурье рациональной функции R).

Для получения условий сходимости интеграла (23) представим подынтегральную функцию в виде

$$R(x)e^{i\alpha x} = \frac{e^{i\alpha x}}{x^{m-n}} + O\left(\frac{1}{x^{m-n+1}}\right) \quad \text{при} \quad |x| > 1.$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^{m-n}}\,dx$ сходится при $m - n \geqslant 1$ (по признаку Дирихле: функция $\int_1^x e^{i\alpha t}\,dt = \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\alpha}}{i\alpha}$ ограничена по модулю, а функция $\frac{1}{x^{m-n}}$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$). Интеграл $\int_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{x^{m-n+1}}\right) dx$ сходится абсолютно, так как по условию $m - n + 1 \geqslant 2$. Сходимость интеграла (23) в $-\infty$ при $m - n \geqslant 1$ проверяется аналогично.

Рассмотрим, как и в пункте I, положительно ориентированный контур $\gamma_R \overset{\triangle}{=} [-R, R] \cup C_R$. При достаточно больших $R > R_0 = \max\left\{|z_k^+| \,\middle|\, k \in \overline{1, l}\right\}$ получаем

$$\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} R(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{l} \operatorname*{res}_{z_k^+}\left(e^{i\alpha z} R(z)\right), \qquad (24)$$

где через $\{z_k^+\}$ обозначены все различные нули многочлена $Q_m(z)$ (знаменателя функции $R(z)$), лежащие в верхней полуплоскости.

С другой стороны, справедливо представление интеграла

$$\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} R(z)\,dz = \int_{-R}^{+R} e^{i\alpha x} R(x)\,dx + \int_{C_R} e^{i\alpha z} R(z)\,dz. \tag{25}$$

Первое слагаемое справа в (25), очевидно, стремится к искомому значению J интеграла (23) при $R \to +\infty$. Необходимо исследовать второе слагаемое в (25).

Лемма 5 (Жордан). *Пусть $\Phi(z)$ — непрерывная функция на замкнутом множестве $\{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0,\ |z| \geqslant R_0 > 0\}$. Пусть число $\alpha > 0$ и $C_R \triangleq \{z \mid |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, $R > R_0$, — семейство полуокружностей в верхней полуплоскости. Обозначим*

$$\varepsilon(R) \triangleq \max\{|\Phi(z)| \mid z \in C_R\} \quad \text{при} \quad R > R_0.$$

Если $\lim\limits_{R\to+\infty} \varepsilon(R) = 0$, то $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z}\Phi(z)\,dz = 0$.

Доказательство. Пусть $z \in C_R$, тогда $z = Re^{i\varphi} = R\cos\varphi + iR\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Поэтому при $z \in C_R$

$$|e^{i\alpha z}| = \left|e^{i\alpha(x+iy)}\right| = e^{-\alpha y} = e^{-\alpha R\sin\varphi}.$$

Воспользуемся для оценки неравенством

$$\sin\varphi \geqslant \frac{2}{\pi}\varphi \quad \text{при} \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{26}$$

Получаем

$$\left|\int_{C_R} e^{i\alpha z}\Phi(z)\,dz\right| \leqslant \int_{C_R} |\Phi(z)| e^{-\alpha R\sin\varphi}|dz| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(R)R\int_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\varphi}\,d\varphi = 2\varepsilon(R)R\int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin\varphi}\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon(R)R\int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R2\varphi/\pi}\,d\varphi \leqslant \frac{\pi}{\alpha}\varepsilon(R),$$

т. е. справедливо заключение леммы. ■

Возвращаясь к формуле (25), покажем с помощью леммы Жордана, что второй интеграл в (25) стремится к нулю при $R \to \infty$. При достаточно больших $R > R_0$ в силу условий сходимости $m - n \geqslant 1$ получаем $\varepsilon(R) \leqslant \frac{2}{R^{m-n}} \leqslant \frac{2}{R} \to 0$. В силу леммы 5 имеет место равенство $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} = J$, а потому справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}R(x)\,dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{l}\operatorname*{res}_{z_k^+}\left(e^{i\alpha z}R(z)\right). \tag{27}$$

Пример 3. Вычислим интеграл Лапласа вида

$$J(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2}\,dx, \quad \alpha\in\mathbb{R}^1.$$

Здесь $R(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$; ее особые точки $z_{1,2} = \pm i$, т. е. в верхней полуплоскости лежит точка $z_1^+ = i$ — полюс 1-го порядка. При $\alpha > 0$ по формуле (27) получаем

$$J(\alpha) = 2\pi i\operatorname*{res}_{i}\left(\frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}\right) = 2\pi i\left(\left.\frac{e^{i\alpha z}}{2z}\right|_{z=i}\right) = \pi e^{-\alpha}.$$

При $\alpha < 0$ делаем в интеграле замену $x = -t$:

$$J(\alpha) = \int_{+\infty}^{-\infty}\frac{e^{-i\alpha t}}{1+t^2}(-dt) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i|\alpha|t}}{1+t^2}\,dt = \pi e^{-|\alpha|}.$$

Окончательно, $J(\alpha) = \pi e^{-|\alpha|}$.

С другой стороны, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{1+x^2}\,dx,$$

причем последний интеграл от нечетной функции, очевидно, равен нулю, то получаем формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-|\alpha|}.$$

Следствие 2. *Интегралы вида*

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos\alpha x\cdot R(x)\,dx \quad \text{и} \quad J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\sin\alpha x\cdot R(x)\,dx, \tag{28}$$

где $R(x)$ — рациональная функция, сводятся к интегралу вида (23), *т. е.*

$$J_1 = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}R(x)\,dx, \qquad J_2 = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}R(x)\,dx.$$