Определение 2. Целая функция, у которой бесконечность является существенно особой точкой, называется *целой трансцендентной функцией.*

Примерами целых трансцендентных функций являются функции e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$.

Теорема 3 (Сохоцкий). *Пусть дана произвольная целая трансцендентная функция f. Тогда для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ найдется последовательность $\{z_n\}$, стремящаяся к бесконечности, и такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.*

Доказательство.

1. Пусть $A = \infty$. Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ на множестве $|z| > n$ функция f не ограничена (в противном случае ∞ была бы устранимой особой точкой функции f, т. е. функция f не была бы трансцендентной), то существует точка $z_n, |z_n| > n$, такая, что $|f(z_n)| > n$. В итоге получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$, что и требовалось доказать.

2. Пусть $A \neq \infty$. Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что для всех $z, |z| > \delta_0$ справедливо неравенство $|f(z) - A| > \varepsilon_0$.

Рассмотрим функцию $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - A}$. Она в силу допущения регулярна в области $\overset{\circ}{B}_{\delta_0}(\infty)$, причем в этой области справедлива оценка $|g(z)| < 1/\varepsilon_0$. То есть ∞ есть устранимая особая точка функции g, поэтому существует предел $B = \lim\limits_{z\to\infty} g(z)$, где $B \in \mathbb{C}$. Так как $f(z) = A + \dfrac{1}{g(z)}$, то функция f тоже при $z \to \infty$ имеет конечный предел, если $B \neq 0$, или бесконечный предел, если $B = 0$. Это противоречит условию теоремы, по которому ∞ есть существенно особая точка функции f. Следовательно, наше допущение оказывается неверным, и теорема доказана. ■

Замечание 1. Так как при доказательстве теоремы Сохоцкого используется лишь то, что бесконечность есть существенно особая точка функции f, то аналогично доказывается следующая более общая теорема.

Теорема 4 (Сохоцкий). *Пусть $a \in \overline{\mathbb{C}}$ есть существенно особая точка функции f. Тогда для любого числа $A \in \overline{\mathbb{C}}$ найдется последовательность $\{z_n\}$, сходящаяся к точке a, и такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.*

Теорема 5 (Пикар). *Пусть дана целая трансцендентная функция f. Тогда в каждой окрестности бесконечности функция f принимает, и притом бесконечное число раз, любое значение из $\mathbb{C}$, кроме, быть может, одного.*

Иначе говоря, теорема Пикара утверждает, что если f — целая трансцендентная функция, то для всякого $A \in \mathbb{C}$, за исключением, быть может, одного, уравнение $f(z) = A$ имеет бесконечное число решений $\{z_n\}$. При этом вследствие теоремы единственности $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

Рассмотрим, например, функцию $w = e^z$. Для любого $A \neq 0$ уравнение $e^z = A$ имеет решения $z_n = \ln|A| + i(\arg_{\text{гл}} A + 2\pi n)$, где $\arg_{\text{гл}} A \in (-\pi, \pi]$, n — любое целое число. Здесь число $A = 0$ является как раз тем исключительным по теореме Пикара значением.