Определение 4. Функция $u = u(x, y)$ действительных переменных x и y, определенная и дважды непрерывно дифференцируемая в области $G \subset \mathbb{R}^2$ (т. е. $u \in C^2(G)$), называется *гармонической* в G, если $\forall\,(x, y) \in G$:

$$\Delta u \triangleq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ регулярна в области G и функции $u(x, y), v(x, y) \in C^2(G)$. Тогда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ суть гармонические функции в G.*

Доказательство. В самом деле, из условий Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{7}$$

получаем в силу (6)

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0\,. \tag{8}$$

Аналогично из условий Коши–Римана (7) следует, что $\Delta v = 0$, т. е. u, v суть гармонические функции. ■

Замечание 2. В § 8 покажем, что всякая регулярная функция f дифференцируема любое число раз и поэтому ее компоненты, т. е. функции u и v, являются бесконечно гладкими функциями. Поэтому требование гладкости функций u и v в теореме 1 не является ограничительным.

Определение 5. Две гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, связанные соотношениями Коши–Римана (7), называются *сопряженными.*

Итак, мы показали, что из регулярности функции $f = u + iv$ следует гармоничность ее действительной и мнимой частей u и v.

Теорема 2. *Если в односвязной области $G \subset \mathbb{C}$ задана гармоническая функция $u(x,y)$, то существует регулярная в области G функция f, для которой $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для данной функции u вычислим функции

$$P(x,y) \stackrel{\triangle}{=} -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad Q(x,y) \stackrel{\triangle}{=} \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{9}$$

Для нахождения функции f достаточно найти функцию $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$. Эта функция вместе с функцией $u(x,y)$ обязана удовлетворять условиям Коши–Римана (7), т. е. ищем функцию $v(x,y)$, решая систему уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial x} = P(x,y), \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = Q(x,y).$$

Так как функция u является гармонической, то для определенных в формуле (9) функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ получаем

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall\,(x,y) \in G. \tag{10}$$

Равенство (10) и односвязность области $G \subset \mathbb{R}^2$ являются достаточными условиями того, что непрерывно дифференцируемое векторное поле $(P(x,y),\ Q(x,y))$ является потенциальным в области G (см., например, [5] том 2, глава 13), т. е. выражение

$$dv = P\,dx + Q\,dy$$

представляет собой полный дифференциал некоторой непрерывно дифференцируемой (потенциальной) функции $v(x,y)$ в G, которую можно найти по формуле:

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy + C,$$

т. е. в нашем случае в силу (9) эта функция равна

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + C, \tag{11}$$

при этом интеграл в (11) является криволинейным интегралом второго рода вдоль ориентированной кривой, лежащей в области G, с началом в точке $(x_0, y_0) \in G$ и концом в точке $(x, y) \in G$. Очевидно, что полученная в (11) функция $v(x, y)$ является гармонической в силу (7), (8), а поэтому в силу теоремы 1 § 3 функция $f(z) \overset{\triangle}{=}$ $\overset{\triangle}{=} u(x, y) + iv(x, y)$ является регулярной в G. ■

Замечание 3. Аналогично доказательству теоремы 2 доказывается утверждение о том, что для всякой гармонической функции $v(x, y)$, заданной в односвязной области G, существует регулярная функция f такая, что $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$.

Теорема 3 (Принцип максимума и минимума гармонической функции). *Пусть функция* $u : G \to \mathbb{R}$ *гармонична в ограниченной области* $G \subset \mathbb{R}^2$ *и непрерывна на ее замыкании* $\overline{G} = G \cup \Gamma$. *Пусть* $u(x, y) \not\equiv \mathrm{const}$. *Тогда максимум и минимум этой функции достигаются на границе области* G.

Доказательство.

1. Допустим противное. Пусть в точке $(x_0, y_0) \in G$ достигается $\max \{u(x, y) \mid (x, y) \in G\}$. Так как множество G есть область, то точка $z_0 = x_0 + iy_0$ является внутренней точкой множества G, и существует число $r > 0$ такое, что круг $B_r(z_0) \subset G$.

Как показано в теореме 2 из § 4, существует регулярная функция $f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ такая, что $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$. (Напомним, что надо взять

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy$$

и

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)).$$

Пусть $w_0 = f(z_0)$. По теореме 1 существует круг $B_\varepsilon(w_0)$ такой, что $B_\varepsilon(w_0) \subset f(G)$. Возьмем в круге $B_\varepsilon(w_0)$ точку w_1 на горизонтальном радиусе правее w_0, т.е. $\operatorname{Re} w_1 > \operatorname{Re} w_0$ (см. рис. 2*б*), причем существует точка $z_1 \in G$ такая, что $f(z_1) = w_1$. Тогда $\operatorname{Re} f(z_1) = u(x_1, y_1) > u(x_0, y_0)$, что противоречит допущению. Следовательно, допущение неверно.

2. Доказательство утверждения о минимуме следует из первой части доказательства о максимуме, так как $\min u(x, y) = -\max(-u(x, y))$, а функция $-u(x, y)$ также является гармонической функцией. ■

Теорема 2 (принцип максимума модуля). *Пусть функция* $f : G \to \mathbb{C}$ *регулярна в ограниченной области* G *и непрерывна в* $\overline{G} = G \cup \Gamma$, *где* Γ — *граница области* G. *Пусть* $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$. *Тогда супремум модуля этой функции*

$$\sup\{|f(z)| \;\Big|\; z \in \overline{G}\}$$

достигается строго на границе Γ *области* G.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $z_0 \in G$. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что существует точка $z_1 \in G$ такая, что $|f(z_1)| > |f(z_0)|$. По теореме 1 образом области G является область G^*, и поэтому точка $w_0 = f(z_0)$ является внутренней точкой, т. е. существует число $\varepsilon > 0$ такое, что справедливо включение $B_\varepsilon(w_0) \subset G^*$. Возьмем точку $w_1 \in B_\varepsilon(w_0)$, которая находится дальше от начала координат (см. рис. 2*а*):

$$w_1 = w_0\left(1 + \frac{\varepsilon}{2|w_0|}\right), \quad |w_1| > |w_0|.$$

Так как $w_1 \in G^*$, то существует точка $z_1 \in G$ такая, что $f(z_1) = w_1$, т. е. $|f(z_1)| > |f(z_0)|$.

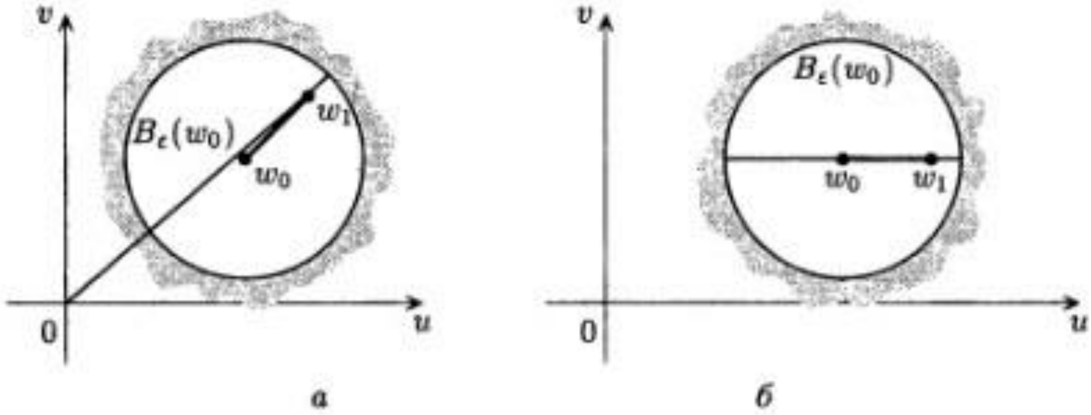

Рис. 2

Следовательно,

$$\sup\{|f(z)| \;\Big|\; z \in \Gamma\} = \sup\{|f(z)| \;\Big|\; z \in \overline{G}\}.$$

В свою очередь, функция $|f(z)|$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $\overline{G}$, и поэтому она достигает свою точную верхнюю грань в некоторой точке границы. ■

Следствие 2. *Если функция* $f : G \to \mathbb{C}$ *регулярна в ограниченной области* G *и непрерывна в ее замыкании* $\overline{G}$, *причем* $f(z) \neq 0$, $\forall\, z \in G$ *и* $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$, *то* $\inf\{|f(z)| \;\Big|\; z \in \overline{G}\}$ *достигается строго на границе области* G.