Эквивалентность этих определений доказывается аналогично доказательству эквивалентности определений предела функции по Коши и по Гейне.

Лемма 1. Пусть $a, b \in I\!R$, $a < b$.

1) Функция f непрерывна на (a, b) $\iff$ f непрерывна в каждой точке $x_0 \in (a, b)$.

2) Функция f непрерывна на $[a, b]$ $\iff$ f непрерывна в каждой точке $x_0 \in (a, b)$, в точке a функция f непрерывна справа, в точке b – непрерывна слева.

Доказательство следует непосредственно из определений.

Задача. Пусть заданы множества $X, Y \subset I\!R$ и функции $f : X \to I\!R$, $g : Y \to I\!R$, $f(X) \subset Y$, пусть функция f непрерывна на множестве X, а функция g непрерывна на множестве Y. Доказать, что сложная функция $\varphi(x) = g(f(x))$ непрерывна на множестве X.

Задача. 1) Пусть заданы непрерывная на интервале (a, b) функция f и число M. Доказать, что множество $\{x \in (a, b) : f(x) < M\}$ открыто.

2) Пусть заданы непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f и число M. Доказать, что множество $\{x \in (a, b) : f(x) \le M\}$ замкнуто.

Напомним, что множество $X \subset I\!R$ называется компактом, если из любой последовательности $\{x_n\} \subset X$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $x \in X$.

Теорема 1. Пусть f непрерывна на компакте X. Тогда $f(X)$ – компакт. (Другими словами, непрерывная функция переводит компакт в компакт.)

Доказательство. Пусть задана произвольная последовательность $\{y_n\} \subset f(X)$. Требуется доказать, что из $\{y_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $y_0 \in f(X)$. Так как $y_n \in f(X)$, то $\exists x_n \in X$: $f(x_n) = y_n$. В силу компактности X существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in X$. В силу непрерывности f $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$, т. е. $\{y_{n_k}\}$ – подпоследовательность последовательности $\{y_n\}$, сходящаяся к $y_0 = f(x_0) \in f(X)$.

■

Задача. Верно ли, что непрерывная функция переводит

а) открытое множество в открытое;

б) замкнутое множество в замкнутое;

в) ограниченное множество в ограниченное?

Теорема 2. (Теорема Вейерштрасса.) Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существуют $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Доказательство. Любой отрезок $[a,b]$ ограничен и замкнут, следовательно, в силу критерия компактности (теорема 2 § 11 главы 1), является компактом. По теореме 1 $f([a,b])$ – компакт. В силу теоремы 3 § 11 главы 1 для любого компакта $Y \subset I\!R$ существуют $\max Y$ и $\min Y$. Следовательно, $\exists \max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \max f([a,b])$ и $\exists \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \min f([a,b])$.

■

Теорема 3. (Теорема Коши о промежуточном значении.) Пусть заданы функция f, непрерывная на $[a,b]$, и число y_0 такие, что либо $f(a) \le y_0 \le f(b)$, либо $f(b) \le y_0 \le f(a)$. Тогда существует $x_0 \in [a,b]$: $f(x_0) = y_0$.

Доказательство. Пусть, например, $f(a) \le y_0 \le f(b)$. Обозначим $[a_0, b_0] = [a, b]$. Пусть определен отрезок $[a_k, b_k]$, причем $f(a_k) \le y_0 \le f(b_k)$. Определим $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$,

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, c_k], & \text{если } y_0 \le f(c_k), \\ [c_k, b_k], & \text{если } f(c_k) < y_0, \end{cases}$$

тогда $f(a_{k+1}) \le y_0 \le f(b_{k+1})$.

Получаем последовательность вложенных отрезков $\{[a_k, b_k]\}$ таких, что $f(a_k) \le y_0 \le f(b_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. По теореме Кантора существует общая точка $x_0 \in [a_k, b_k]$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Так как $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \to 0$, то $|x_0 - a_k| \le |b_k - a_k| \to 0$, следовательно, $a_k \to x_0$, аналогично, $b_k \to x_0$.

В силу непрерывности f $f(a_k) \to f(x_0)$, $f(b_k) \to f(x_0)$. Так как $f(a_k) \le y_0 \le f(b_k)$, то по теореме о предельном переходе в неравенствах $f(x_0) \le y_0 \le f(x_0)$, т. е. $y_0 = f(x_0)$.

■

Определение. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *ограниченной*, если множество ее значений $f(X)$ ограничено.

Следствие. (Из теоремы Вейерштрасса.) Непрерывная на отрезке функция ограничена на этом отрезке.

Задача. 1) Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b]$ $f(x) > 0$. Верно ли, что $\exists \varepsilon > 0$: $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \ge \varepsilon$?

2) Пусть функция f непрерывна на (a, b) и $\forall x \in (a, b)$ $f(x) > 0$. Верно ли, что $\exists \varepsilon > 0$: $\forall x \in (a, b)$ $f(x) \ge \varepsilon$?

Задача. Пусть функция f непрерывна на $\mathbb{R}$ и $\exists \lim\limits_{x \to \infty} f(x) \in \mathbb{R}$. Верно ли, что функция f ограничена на $\mathbb{R}$?

Теорема 4. Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $f([a,b]) = [m,M]$, где $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Доказательство. Если $m = M$, то отрезок $[m,M]$ вырождается в одну точку, а функция f равна константе $m = M$ на $[a,b]$. При этом утверждение теоремы тривиально выполняется. Поэтому будем предполагать, что $m < M$.

Из определений минимума и максимума следует, что $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$, т.е. $f([a,b]) \subset [m,M]$. Покажем, что $[m,M] \subset f([a,b])$. Из определений минимума и максимума также следует, что $m, M \in f([a,b])$, т.е. $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$: $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$. По теореме Коши о промежуточном значении для любого числа $y_0 \in [m,M]$ существует точка x_0, лежащая на отрезке с концами x_1, x_2 и такая, что $f(x_0) = y_0$. Поэтому $y_0 \in f([a,b])$. Следовательно, $[m,M] \subset f([a,b])$.

■

Следствие. Непрерывная функция переводит отрезок в отрезок или в точку.

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *числовым промежутком*, если X является отрезком, точкой, интервалом, полуинтервалом, лучом (открытым и замкнутым) или всей числовой прямой.

Теорема 5. Пусть функция f непрерывна на числовом промежутке X и пусть $\inf\limits_{x\in X} f(x) = m \in \overline{\mathbb{R}}$, $\sup\limits_{x\in X} f(x) = M \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\forall y_0 \in (m,M) \quad \exists x_0 \in X : \quad f(x_0) = y_0.$$