Глава III

РЯД ЛОРАНА. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЗНАЧНОГО ХАРАКТЕРА

§ 17. Ряд Лорана

1. Область сходимости ряда Лорана. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad (1)$$

где a — фиксированная точка комплексной плоскости, c_n — заданные комплексные числа, называется *рядом Лорана*. Этот ряд называется сходящимся в точке z, если в этой точке сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad (2)$$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}, \qquad (3)$$

а сумма ряда (1) по определению равна сумме рядов (2) и (3).

Ряд (2) является степенным рядом, и, следовательно, его область сходимости есть круг $|z-a|<R$ (при $R=0$ ряд (2) сходится только в точке a, а при $R=\infty$ — во всей комплексной плоскости). Полагая в (3) $1/(z-a)=t$, получаем степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}t^n$, область сходимости которого есть круг $|t|<\alpha$. Следовательно, ряд (3) сходится в области $|z-a|>\rho$, где $\rho=1/\alpha$. Если выполняется условие

$$\rho < R, \qquad (4)$$

то ряд (1) сходится в области

$$\rho < |z-a| < R, \qquad (5)$$

т. е. в круговом кольце с центром в точке a.

В каждой точке, лежащей вне замкнутого кольца (5), ряд Лорана (1) расходится в силу расходимости одного из рядов (2)—(3). Таким образом, область сходимости ряда (1) есть круговое кольцо (5), если выполнено условие (4). В точках, лежащих на границе кольца (5), ряд (1) может как сходиться, так и расходиться. Если $\rho > R$, то ряды (2) и (3) не имеют общей области сходимости и, следовательно, ряд (1) нигде не сходится.

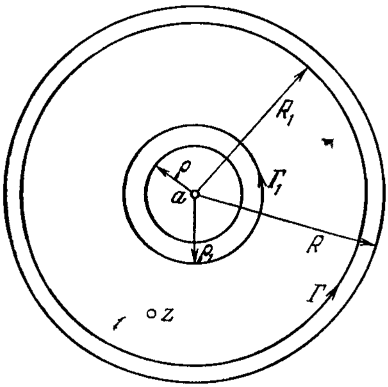

Рис. 52

Замечание 1. Из теоремы Абеля (§ 11) вытекает, что во всяком замкнутом кольце $\rho < \rho_1 \leqslant |z-a| \leqslant R_1 < R$, лежащем в кольце (5), ряд (1) сходится равномерно и согласно теореме Вейерштрасса (§ 12, теорема 4) его сумма $f(z)$ регулярна в кольце (5). Справедливо и обратное утверждение — теорема 1.

2. Разложение регулярной функции в ряд Лорана.

Теорема 1. *Функция $f(z)$, регулярная в кольце D: $\rho < |z-a| < R$, представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{6}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = R_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta, \quad \rho < R_0 < R, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим кольцо D_1: $\rho_1 < |z-a| < R_1$ (рис. 52). Обозначим Γ и Γ_1 соответственно внешнюю и внутреннюю границы кольца D_1. Пусть z — любая точка кольца D_1. В силу формулы (4) § 10 имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{8}$$

Заметим сначала (см. доказательство теоремы 1 § 12), что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{9}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{10}$$

Преобразуем, далее, второе слагаемое формулы (8). Имеем

$$-\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{z-a-(\zeta-a)}=\frac{1}{(z-a)\left[1-\frac{\zeta-a}{z-a}\right]}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^k}{(z-a)^{k+1}}. \tag{11}$$

Если $\zeta\in\Gamma_1$, то $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|=\frac{\rho_1}{|z-a|}=q<1$ и, следовательно, в силу признака Вейерштрасса, ряд (11) равномерно сходится по $\zeta\,(\zeta\in\Gamma_1)$ для каждого $z\in D_1$. Так как функция $f(\zeta)$ непрерывна на Γ_1, то она ограничена на Γ_1. Отсюда следует, что ряд

$$-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)(\zeta-a)^k}{(z-a)^{k+1}} \tag{12}$$

равномерно сходится по ζ на окружности Γ_1. Интегрируя ряд (12) почленно и полагая $k+1=-n$, получаем

$$-\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-a)^n, \tag{13}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta. \tag{14}$$

Подставляя (13) и (9) в (8), получаем сходящееся в каждой точке кольца D_1 разложение (6), коэффициенты которого определяются по формулам (10) и (14).

В силу следствия 2 из интегральной теоремы Коши (§ 9, формула (13)), в формулах (14) и (10) в качестве контура интегрирования можно взять окружность $|\zeta-a|=R_0$, $\rho_1<R_0<R_1$, т. е. справедлива формула (7). Поскольку ρ_1 можно взять сколь угодно близким к ρ, а R_1 к R, то ряд (6) сходится во всем кольце D. Теорема доказана.

3. Единственность разложения функции в ряд Лорана.

Теорема 2. *Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$, регулярной в кольце D: $\rho<|z-a|<R$, единственно.*

Доказательство. Пусть функция $f(z)$, регулярная в кольце D, имеет в этом кольце два разложения:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{c}_n(z-a)^n. \tag{15}$$

Умножая ряды (15) на $(z-a)^{-m-1}$, где m — фиксированное целое число, получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^{n-m-1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{c}_n(z-a)^{n-m-1}. \tag{16}$$

Так как ряды (16) равномерно сходятся на окружности $|z-$

$-a|=R_0$, $\rho<R_0<R$, то, интегрируя их почленно по этой окружности и учитывая, что при целом k

$$\int\limits_{|z-a|=R_0}(z-a)^k\,dz=\begin{cases}0, & k\neq-1,\\ 2\pi i, & k=-1,\end{cases}$$

получаем $c_m=\tilde{c}_m$ для каждого целого m.

Из теоремы 2 следует, что коэффициенты разложения данной функции в ряд Лорана не зависят от того, каким способом получено это разложение.

Пример 1. Функция

$$f(z)=\frac{1}{(1-z)(z+2)}$$

регулярна в областях D_1: $|z|<1$, D_2: $1<|z|<2$, D_3: $|z|>2$. Найдем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в этих областях. Представим функцию $f(z)$ в виде суммы простых дробей:

$$f(z)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z+2}\right). \tag{17}$$

Если $|z|<1$, то

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n, \tag{18}$$

а если $|z|>1$, то

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}. \tag{19}$$

Аналогично, в круге $|z|<2$ имеем разложение

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}, \tag{20}$$

а если $|z|>2$, то

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n}. \tag{21}$$

а) В области D_1: $|z|<1$ в силу формул (17), (18), (20) функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left[1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right]z^n.$$

Этот ряд есть ряд Тейлора.

б) В области D_2: $1 < |z| < 2$ разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана (формулы (17), (19), (20)) имеет следующий вид:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3 \cdot 2^{n+1}}.$$

Этот ряд содержит как положительные, так и отрицательные степени z.

в) В области D_3: $|z| > 2$ функция $f(z)$ представляется рядом Лорана (см. формулы (17), (19), (21)), содержащим только отрицательные степени z

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1} - 1}{3z^n}. \quad \square$$

Замечание 2. Укажем на связь между рядом Лорана и рядом Фурье. Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце

$$\delta_1 < |z| < 1 + \delta_2, \quad 0 \leqslant \delta_1 < 1, \quad \delta_2 > 0, \tag{22}$$

содержащем единичную окружность $|z| = 1$. Тогда она представляется в этом кольце рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

откуда, полагая $z = e^{i\varphi}$, получаем разложение в ряд Фурье функции

$$F(\varphi) = f(e^{i\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi}. \tag{23}$$

Обратно, если функция $F(\varphi)$ представляется в виде

$$F(\varphi) \equiv f(e^{i\varphi}),$$

где функция $f(z)$ регулярна в кольце (22), то ряд (23) является рядом Фурье для $F(\varphi)$.

4. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.

Теорема 3. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце D: $\rho_0 < |z - a| < R_0$. Тогда коэффициенты ряда Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

для функции $f(z)$ в кольце D удовлетворяют неравенствам

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{R^n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{24}$$

где $M = \max\limits_{z \in \gamma_R} |f(z)|$, γ_R: $|z - a| = R$, $\rho_0 < R < R_0$.

Неравенства (24) называются *неравенствами Коши для коэффициентов ряда Лорана.*

Доказательство. Пользуясь формулой (7), получаем

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta-a|=R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-a|^{n+1}} |d\zeta| \leqslant \frac{M}{2\pi R^{n+1}} \int\limits_{|\zeta-a|=R} |d\zeta| = \frac{M}{R^n}.$$

§ 18. Изолированные особые точки однозначного характера

1. Классификация изолированных особых точек однозначного характера.

Определение 1. Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце $0 < |z-a| < \rho$, но не регулярна в точке a $(a \neq \infty)$. Тогда точка a называется *изолированной особой точкой однозначного характера для функции* $f(z)$.

Кольцо $0 < |z-a| < \rho$, т. е. круг $|z-a| < \rho$ с выброшенным центром, будем иногда называть так: *проколотая окрестность точки* a.

Аналогично, бесконечно удаленная точка называется изолированной особой точкой однозначного характера для функции $f(z)$, если функция $f(z)$ регулярна в области $\rho < |z| < \infty$.

В зависимости от поведения функции $f(z)$ вблизи точки a различают следующие три типа особых точек.

Определение 2. Изолированная особая точка a однозначного характера функции $f(z)$ называется

а) *устранимой особой точкой,* если

$$\lim_{z \to a} f(z)$$

существует и конечен;

б) *полюсом,* если $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$;

в) *существенно особой точкой*, если $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ не существует.

Пример 1. Для функции

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

точка $z = 0$ является устранимой особой точкой, так как функция $f(z)$ регулярна при $z \neq 0$ и

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \ldots}{z} = 1. \quad \square$$

Пример 2. Для функции

$$f(z) = \frac{z}{z+1}$$