б) Привести пример функции, для которой $f'_+(x_0)$ существует, а $f'(x_0+0)$ не существует.

§ 5. Формула Тейлора

Определение. Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$.

(Здесь и далее, если не оговорено обратное, записывая $\exists f^{(n)}(x_0)$, будем предполагать, что $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$.)

Тогда

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

называется *многочленом Тейлора* функции f в точке x_0.

$r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ называется *остаточным членом* в формуле Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x).$$

Лемма 1. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k(x) = (x - x_0)^k$. Тогда

1) $\varphi_k^{(s)}(x) = \begin{cases} \frac{k!}{(k-s)!}(x - x_0)^{k-s} & \text{при} \quad s \in \{0, \ldots, k\}, \\ 0 & \text{при} \quad s > k; \end{cases}$

2) $\varphi_k^{(s)}(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad s \neq k, \\ k! & \text{при} \quad s = k. \end{cases}$

Доказательство. 1) $\varphi'_k(x) = k(x - x_0)^{k-1}$, $\varphi''_k(x) = k(k-1)(x - x_0)^{k-2}$ и так далее, при $k \leq s$: $\varphi_k^{(s)}(x) = k(k-1)\ldots(k-(s-1))(x - x_0)^{k-s} = \frac{k!}{(k-s)!}(x - x_0)^{k-s}$. Следовательно, $\varphi_k^{(k)}(x) = k!$ и $\varphi_k^{(s)}(x) = 0$ при $s > k$.

Пункт (2) следует из пункта (1).

■

Лемма 2. Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$. Тогда $\forall s \in \{0,...,n\}$ $r_n^{(s)}(x_0) = 0$.

Доказательство. Заметим, что
$P_n^{(s)}(x) = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\varphi_k(x)\right)^{(s)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\varphi_k^{(s)}(x)$.

Из леммы 1(б) следует, что при $s \le n$: $P_n^{(s)}(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\varphi_k^{(s)}(x_0) = f^{(s)}(x_0)$, а значит, $r_n^{(s)}(x_0) = f^{(s)}(x_0) - P_n^{(s)}(x_0) = 0$.

■

Определение. Будем говорить, что число ξ *лежит строго между числами* x_0 и x, если $x < \xi < x_0$ или $x_0 < \xi < x$.

Лемма 3. (Основная.) Пусть заданы $s, n, k \in \mathbb{N}$, причем $s \le n+1$, $s \le k$, и пусть $\varphi_k(x) = (x - x_0)^k$. Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$ и в некоторой $U_\delta(x_0)$ существует $f^{(s)}(x)$. Тогда

$$\forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \quad \exists \xi, \text{ лежащее строго между } x \text{ и } x_0:$$

$$\frac{r_n(x)}{\varphi_k(x)} = \frac{r_n^{(s)}(\xi)}{\varphi_k^{(s)}(\xi)}.$$

Доказательство. Так как $r_n(x_0) = 0$, $\varphi_k(x_0) = 0$, то по теореме Коши о среднем $\forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ существует число ξ, лежащее строго между x и x_0 такое, что $\frac{r_n(x)}{\varphi_k(x)} = \frac{r_n(x)-r_n(x_0)}{\varphi_k(x)-\varphi_k(x_0)} = \frac{r_n'(\xi)}{\varphi_k'(\xi)}$. Следовательно, при $s = 1$ утверждение леммы выполняется.

Пусть оно выполняется при $s = p - 1$ (где $p \le n + 1$, $p \le k$), т. е. существует число ξ, лежащее строго между x и x_0 такое, что $\frac{r_n(x)}{\varphi_k(x)} = \frac{r_n^{(p-1)}(\xi)}{\varphi_k^{(p-1)}(\xi)}$.

Так как $r_n^{(p-1)}(x_0) = 0$, $\varphi_k^{(p-1)}(x_0) = 0$, то по теореме Коши о среднем существует число ξ_1, лежащее строго между ξ и x_0 (а значит и строго между x и x_0) такое, что $\frac{r_n(x)}{\varphi_k(x)} = \frac{r_n^{(p-1)}(\xi) - r_n^{(p-1)}(x_0)}{\varphi_k^{(p-1)}(\xi) - \varphi_k^{(p-1)}(x_0)} = \frac{r_n^{(p)}(\xi_1)}{\varphi_k^{(p)}(\xi_1)}$. Таким образом, утверждение леммы выполнено для $s = p$, что по индукции доказывает лемму.

■

Теорема 1. (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.) Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Доказательство. Так как $\exists f^{(n)}(x_0)$, то в некоторой $U_\delta(x_0)$ существует $f^{(n-1)}(x)$. Применяя лемму 3 для $s = n - 1$, $k = n$, получим, что $\forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ существует число $\xi = \xi(x)$, лежащее строго между x и x_0 такое, что $\frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{r_n^{(n-1)}(\xi)}{\varphi_n^{(n-1)}(\xi)} = \frac{r_n^{(n-1)}(\xi)}{n!\,(\xi - x_0)}$.

С учетом равенства $r_n^{(n-1)}(x_0) = 0$ получаем $\frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{1}{n!} \frac{r_n^{(n-1)}(\xi) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{(\xi - x_0)}$.

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} \xi(x) = x_0$ и $\xi(x) \ne x_0$ $\forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$, то по теореме о замене переменных при вычислении предела имеем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(\xi(x)) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{\xi(x) - x_0} =$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{\xi \to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(\xi) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{\xi - x_0}.$$

Отсюда по определению производной $r_n^{(n)}(x_0)$, используя лемму 2, получаем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{1}{n!}\, r_n^{(n)}(x_0) = 0,$$

т. е. $\quad r_n(x) = o(\varphi_n(x)) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

■

Теорема 2. (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.)

Пусть в некоторой $U_\delta(x_0)$ существует $f^{(n+1)}(x)$. Тогда $\forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \quad \exists \xi$, лежащее строго между x и x_0 такое, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Доказательство. Применяя лемму 3 для $s = k = n + 1$, получим, что $\forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ существует число ξ, лежащее строго между x и x_0 такое, что $\frac{r_n(x)}{\varphi_{n+1}(x)} = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{\varphi_{n+1}^{(n+1)}(\xi)} = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$. Так как $P_n^{(n+1)}(\xi) = 0$, то $r_n^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$ и $f(x) - P_n(x) = r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\varphi_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

■

Теорема 3. (Единственность разложения по формуле Тейлора.) Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$ и пусть при $x \to x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) =$$