Замечание 2. Из существования частных производных по всем переменным не следует дифференцируемость, а значит, не следует существование градиента функции. Например, все частные производные функции (1) в точке $(0,0)$ существуют и равны нулю, однако эта функция недифференцируема в точке $(0,0)$.

Теорема 4. (О связи частных производных и дифференциала функции.) Если функция $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$, то для дифференциала функции f в точке x^0 справедлива формула

$$df(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\, dx_i, \quad \text{где} \quad dx_i = x_i - x_i^0.$$

Доказательство. По определению дифференциала $df(x^0) = (\operatorname{grad} f(x^0), x - x^0)$. Следовательно, по теореме 3 $df(x^0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\,(x_i - x_i^0)$.

■

§ 7. Достаточные условия дифференцируемости

Теорема 1. Если все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., n$ определены в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и непрерывны в точке x^0, то функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0.

Доказательство проведем для функции двух переменных $f(x, y)$, где $x, y \in \mathbb{R}$. Пусть частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0).

Представим приращение функции f как сумму приращений по каждой переменной:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0). \tag{1}$$

Зафиксировав y и применив теорему Лагранжа о среднем к функции одной переменной $\varphi(x) = f(x,y)$, получим, что существует число ξ, лежащее между x и x_0, такое, что $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi) \cdot (x - x_0)$. Иными словами, существует число $\theta \in (0,1)$, зависящее от x и y, такое, что $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0)$, т. е. $f(x,y) - f(x_0,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(x - x_0), y) \cdot (x - x_0)$.

Определим функцию $\varepsilon(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(x - x_0), y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Тогда

$$f(x,y) - f(x_0,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x,y) \cdot (x - x_0). \quad (2)$$

Так как частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ непрерывна в точке (x_0,y_0) и $\theta \in (0,1)$, то $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(x - x_0), y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, и, следовательно, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \varepsilon(x,y) = 0$. Поэтому

$$\frac{|\varepsilon(x,y) \cdot (x - x_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \leq |\varepsilon(x,y)| \xrightarrow{(x,y) \to (x_0,y_0)} 0,$$

т. е. $\varepsilon(x,y) \cdot (x - x_0) = o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right)$ $(x \to x_0,\ y \to y_0)$. Отсюда и из (2) получаем

$$f(x,y) - f(x_0,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right) \quad \text{при } x \to x_0,\ y \to y_0.$$

Аналогично,

$$f(x_0,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \cdot (y - y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right) \quad \text{при } x \to x_0,\ y \to y_0.$$

Следовательно, учитывая (1), получаем

$$f(x,y)-f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)+$$

$$+o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right) \quad \text{при} \quad x\to x_0,\ y\to y_0,$$

что доказывает дифференцируемость функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0). Случай функции n переменных ($n\geq 3$) рассматривается аналогично.

■

§ 8. Дифференцирование сложной вектор-функции

Определение. Пусть вектор-функция $f(x)=(f_1(x),...,f_m(x))$ определена в некоторой окрестности точки $x^0\in I\!R^n$. Будем говорить, что вектор-функция f *дифференцируема* в точке x^0, если все ее координаты $f_k(x)$ $(k=1,...,m)$ дифференцируемы в точке x^0. Матрицей Якоби вектор-функции f в точке x^0 называется следующая матрица, составленная из частных производных:

$$\mathcal{D}\,f(x^0)=\begin{Vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{Vmatrix}.$$

Заметим, что в k-й строке матрицы Якоби стоят координаты градиента скалярной функции $f_k(x)$.

Лемма 1. Вектор-функция $f:X\to I\!R^m$ дифференцируема в точке $x^0\in \operatorname{int}X\subset I\!R^n$ тогда и только тогда, когда существует матрица A размера $m\times n$, такая, что

$$f(x)-f(x^0)=A\,(x-x^0)+\overline{o}(|x-x^0|) \quad \text{при} \quad x\to x^0, \quad (1)$$