Вопросы 16–17. Гармонические функции и их свойства

Примеры и физический смысл гармонических функций

Функция $u(x) \in C^2(\Omega)$ называется гармонической в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если она удовлетворяет уравнению Лапласа $\triangle u = 0$ в этой области. При $n = 1$ гармонические функции есть линейные функции. Поэтому будем полагать $n \geq 2$. Примером гармонической функции в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ является фундаментальное решение уравнения Лапласа

$$\mathcal{E}_2(x) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \ln \frac{1}{|x|}\,, \quad n = 2;$$

$$\mathcal{E}_3(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}\,, \quad n = 3.$$

Эллиптические уравнения описывают стационарные процессы. В частности, уравнение Лапласа описывает установившееся распределение температуры $u = u(x)$ однородного твердого тела $\Omega \in \mathbb{R}^3$; при $n = 2$ решение уравнения Лапласа описывает форму находящейся в равновесии мембраны, натянутой на некоторую замкнутую плоскую кривую. Потенциалы поля тяготения и стационарного электрического поля также удовлетворяют уравнению Лапласа.

Слабый принцип максимума для гармонических функций

Одним из наиболее важны свойств гармонических функций является принцип максимума, который выполняется как в слабой, так и в сильной форме.

Теорема (слабый принцип максимума)**.** *Гармоническая в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ функция $u \in C(\overline{\Omega})$ не принимает нигде внутри Ω значений, больших чем ее наибольшее значение на границе, или меньших чем ее наименьшее значение на границе, т.е. если $m = \min\limits_{\partial\Omega} u(x)$, $M = \max\limits_{\partial\Omega} u(x)$, то $m \leqslant u(x) \leqslant M$ в $\overline{\Omega}$.*

Доказательство (от противного). Пусть $u(y^\circ) \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{y\in\partial\Omega} u(y)$ — точка максимума гармонической функции на $\partial\Omega$. И пусть $\exists\, x^\circ \in \Omega :\ u(x^\circ) > u(y^\circ)$. Очевидно,

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u(x^\circ) - u(y^\circ)}{2} > 0.$$

Тогда $u(x^\circ) = u(y^\circ) + 2\varepsilon > u(y^\circ) + \varepsilon$, причем $\forall\, y \in \partial\Omega$ имеем $u(x^\circ) > u(y) + \varepsilon$. Рассмотрим функцию $v(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x) + \eta|x - x^\circ|^2$, где η — положительная постоянная, подходящее значение которой будет выбрано далее в ходе доказательства. А так как $\forall\, y \in \partial\Omega$ имеем

$$v(x^\circ) = u(x^\circ) > u(y) + \varepsilon = v(y) - \eta|y - x^\circ|^2 + \varepsilon,$$

то в силу очевидного неравенства $\max\limits_{x\in\partial\Omega} |x - x^\circ|^2 \geqslant |y - x^\circ|^2\ \forall\, y \in \partial\Omega$ получаем

$$v(x^\circ) \geqslant v(y) - \eta \max_{x\in\partial\Omega} |x - x^\circ|^2 + \varepsilon \quad \forall y \in \partial\Omega.$$

Ввиду ограниченности области $\max\limits_{x\in\partial\Omega}|x-x^{\circ}| = d$, где d — некоторая конечная величина. Выберем теперь число η так, чтобы $-\eta d+\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2}$, например, полагая $d=\frac{\varepsilon}{4d}$. Тогда

$$v(x^{\circ}) \geqslant v(y)-\eta d+\varepsilon > v(y)+\frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, y\in\partial\Omega.$$

Следовательно, функция $v(x)$ достигает своего максимума в некоторой внутренней точке $x^1\in\Omega$. Поэтому

$$\frac{\partial v}{\partial x_k}\Big|_{x=x^1}=0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2}\Big|_{x=x^1}\leqslant 0, \quad k=1,...,n, \quad \Longrightarrow \quad \triangle v\Big|_{x=x^1}\leqslant 0.$$

Но $\triangle v=\triangle u+2\eta n=2\eta n>0$ в Ω. Получили противоречие. Оценка снизу $m\leqslant u(x)$ доказывается заменой $u(x)$ на $-u(x)$. Теорема доказана.

Замечание. *Для неограниченных областей Ω теорема, вообще говоря, неверна. Так, для области $\Omega=\mathbb{R}^n_+=\{x\in\mathbb{R}^n : x_n>0\}$, пример задачи Дирихле $\triangle u=0$, $u|_{x_n=0}=0$ с решением $u(x)=x_n$ показывает, что утверждение теоремы неверно.*

Следствия из слабого принципа максимума:

Следствие 1. *Гармоническая функция, непрерывная вплоть до границы и равная нулю на границе ограниченной области Ω, тождественно равна нулю во всей области.*

Следствие 2. *Из следствия 1 вытекает единственность классического решения $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ задачи Дирихле для уравнения Пуассона*

$$\triangle u=-f, \quad u|_{\partial\Omega}=\varphi,$$

в ограниченной области $\Omega\in\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$.

Доказательство. Пусть имеется два решения u_1 и u_2. Тогда их разность $v=u_1-u_2$ есть гармоническая функция с нулевыми условиями на границе:

$$\triangle v=0, \ \ x\in\Omega, \ \ v|_{\partial\Omega}=0.$$

Следовательно, $v\equiv 0$ в Ω, т.е. $u_1\equiv u_2$ в Ω.

Следствие 3. *Из принципа максимума вытекает непрерывная зависимость решения задачи Дирихле от граничных данных для произвольной ограниченной области Ω. Действительно, пусть u_1 и u_2 — решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области Ω и $u_1|_{\partial\Omega}=\varphi_1$, $u_2|_{\partial\Omega}=\varphi_2$, причем $|\varphi_1-\varphi_2|<\varepsilon$, т.е. граничные значения гармонической функции u_1-u_2, равные $\varphi_1-\varphi_2$, удовлетворяют неравенствам $-\varepsilon<\varphi_1-\varphi_2<\varepsilon$, тогда всюду в области Ω имеем $-\varepsilon<u_1-u_2<\varepsilon$, т.е. $|u_1-u_2|<\varepsilon$, что и требовалось доказать.*

Следствие 4. *Если последовательность функций $u_n(x)$, гармонических в ограниченной области Ω и непрерывных вплоть до границы, сходится равномерно на границе $\partial\Omega$ области Ω, то она сходится равномерно во всей замкнутой области.*

Для доказательства рассмотрим последовательность гармонических функций $\{u_n(x)\}$, и пусть $\{\varphi_n\}$ — их граничные значения на $\partial\Omega$. По предположению, последовательность $\{\varphi_n\}$ равномерно сходится на $\partial\Omega$. По критерию Коши это значит, что $\forall\varepsilon>0$ существует номер N, что при $m,n>N$ всюду на $\partial\Omega$: $|\varphi_n-\varphi_m|<\varepsilon$. Но тогда из принципа максимума для этих n и m будет следовать, что $|u_n-u_m|<\varepsilon$ всюду в $\overline{\Omega}$. Но тогда опять же по критерию Коши заключаем, что последовательность $\{u_n\}$ равномерно сходится в $\overline{\Omega}$.

Строгий принцип максимума для гармонических функций

Утверждение следующей теоремы принято называть строгим принципом максимума для гармонических функций. Существенно, что строгий принцип максимума не требует ограниченности области.

Теорема (без доказательства). *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $u \in C^2(\Omega)$ — гармоническая в Ω функция, отличная от постоянной. Тогда $u(x)$ не принимает ни в одной внутренней точке Ω значений, равных своей верхней и нижней грани.*

Замечание. *Если Ω — ограниченная область, $u \in C(\overline{\Omega})$, то, очевидно, верхняя и нижняя грани значений $u = u(x)$ в Ω совпадают, соответственно, с ее максимальным и минимальным значениями в $\overline{\Omega}$.*

Следствие 1. *Отличная от постоянной гармоническая в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ функция $u \in C(\overline{\Omega})$ принимает свое наибольшее и наименьшее значение только на $\partial\Omega$.*

Следствие 2. *Если гармоническая в ограниченной области функция $u \in C(\overline{\Omega})$ принимает свое наибольшее или наименьшее значение внутри области, то она тождественно равна постоянной.*