ЛЕКЦИЯ 5

Теорема единственности. Ряды Лорана

5.1. Степенные ряды (продолжение)

На предыдущей лекции была сформулирована и доказана теорема 4.4, которая пригодится и в данной лекции. Напомним ее:

Пусть функция f такова, что:

$$f \in \mathbb{C}^1\Big(B_r(a)\Big).$$

Тогда:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad \forall z \in B_R(a),$$

где:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Определение 5.1. Пусть G — область в $\mathbb{C}$. Пусть функции f_n таковы, что:

$$f_n : \ G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Тогда говорится, что ряд из этих функций вида:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$$

сходится равномерно **строго внутри области** G, если (см. рис. 5.1):

$$\forall z \in \mathbb{R}, \ \forall R > 0 \text{ ряд сходится равномерно в круге } \overline{B_R(a)}.$$

Теорема 5.1 (Первая и вторая теоремы Вейерштрасса). *Пусть G — область в $\mathbb{C}$. Пусть функции f_n таковы, что:*

$$f_n \in \mathbb{C}^1(G),$$

причем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) \rightrightarrows f(z) \text{ равномерно строго внутри } G.$$

Тогда:

1) ***Первая теорема Вейерштрасса:***

$$f \in \mathbb{C}^1(G).$$

2) ***Вторая теорема Вейерштрасса:***

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f^{(k)}(z) \rightrightarrows f^{(k)}(z), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

где ряд сходится равномерно строго внутри G.

Суть теоремы заключается в том, что она говорит о почленном дифференцировании равномерно сходящегося ряда, состоящего из регулярных функций.

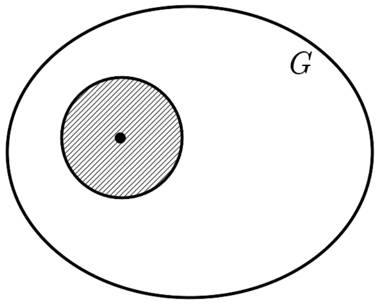

Рис. 5.1.

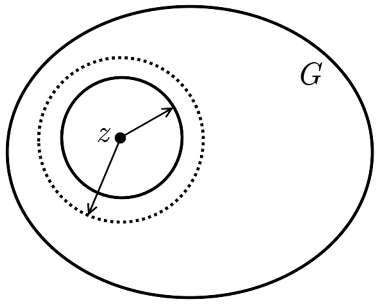

Рис. 5.2.

Докажем эту теорему:

□ В доказательстве будет использована интегральная формула Коши и свойства интеграла типа Коши.

Первая теорема Вейерштрасса: рассмотрим произвольную точку $x \in G$. Зафиксируем ее (см. рис. 5.2).

Так как G — открытое множество, то можно подобрать такие положительные числа r и r_1, что:

$$\overline{B_{r+r_1}(z)} \subset G.$$

Рассмотрим частичные суммы:

$$S_N(z) = f_1(z) + \cdots + f_N(z).$$

Из условия теоремы следует, что:

$$S_N \in \mathbb{C}^1(G) \text{ — регулярна во всей области.}$$

Следовательно, для функции f и для круга большего радиуса $B_{r+r_1}(z)$ по интегральной формуле Коши верно, что:

$$S_N(z') = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{r+r_1}} \frac{S_N(\xi)}{\xi - z'}\, d\xi,$$

где:

$$\Gamma_{r+r_1} = \partial B_{r+r_1}(z), \quad z' \in B_r(z).$$

Так как:

$$f_n \in \mathbb{C}\Big(\overline{B_{r+r_1}(z)}\Big),$$

причем:

$$\sum f_n \rightrightarrows f \text{ в } \overline{B_{r+r_1}(z)},$$

то следовательно:

$$f \in \mathbb{C}\Big(\overline{B_{r+r_1}(z)}\Big).$$

Таким образом, можно рассмотреть следующий интеграл:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{r+r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \quad \forall z \in G \setminus \Gamma_{r+r_1}.$$

Проведем оценку сверху для разности:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{r+r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{r+r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z'}\, d\xi \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_{r+r_1}} \frac{\big|S_N(\xi) - f(\xi)\big|}{\big|\xi - z'\big|} \big|d\xi\big|, \quad z' \in B_r(z).$$

Так как в частности:

$$S_N \rightrightarrows f \text{ на } \Gamma_{r+r_1},$$

то верно следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N}: \ \forall N \geqslant N_1 \quad \big|S_N(\xi) - f(\xi)\big| < \varepsilon, \quad \forall \xi \in \Gamma_{r+r_1}.$$

Если взять произвольное число ε и выбрать соответствующее ему число N, то получим:

$$\left|S_N(z') - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{r+r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z'}\,d\xi\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi r_1}\cdot\int\limits_{\Gamma_{r+r_1}} \big|d\xi\big| = \frac{\varepsilon\cdot 2\pi(r+r_1)}{2\pi r} = \varepsilon_1,$$

так как:

$$\big|\xi - z'\big| \geqslant r_1.$$

Тогда для произвольного положительного числа ε_1, в силу того, что положительное число ε также является произвольным, можно выбрать такое число N_1, что:

$$\forall N \geqslant N_1 \quad \left|S_N(z') - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{r+r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z'}\,d\xi\right| < \varepsilon_1, \quad \forall z' \in \overline{B_r(z)},$$

то есть:

$$\forall z' \in B_r(z) \quad S_N(z') \to \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{r+r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z'}\,d\xi.$$

Следовательно, по свойствам интеграла типа Коши:

$$f \in \mathbb{C}^\infty\big(B_r(z)\big).$$

В силу произвольности выбора круга и точки z, получим, что:

$$f \in \mathbb{C}^\infty\big(B_r(z)\big),$$

и таким образом, первая часть теоремы доказана.

Вторая теорема Вейерштрасса: выбираем произвольно круг (см. рис. 5.3):

$$\overline{B_r(z)} \subset G, \quad z \in G, \quad r > 0.$$

Так как $\overline{B_r(z)}$ является компактом, то можно записать:

$$\exists r_1 > 0: \ \overline{B_{r+r_1}(z)} \subset G.$$

Так как частичная сумма дифференцируема один раз, то она дифференцируема сколько угодно раз, а значит — бесконечно дифференцируема в G:

$$S_N \in \mathbb{C}^\infty(G).$$

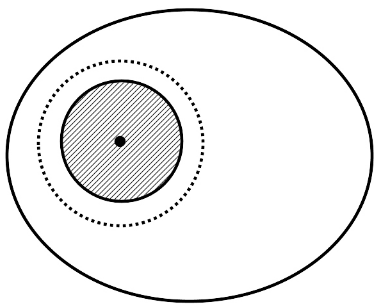

Рис. 5.3.

Также из первой теоремы Вейерштрасса известно, что:

$$f \in \mathbb{C}^\infty(G).$$

Следовательно, по свойствам интеграла типа Коши:

$$S_N^{(k)}(z') = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{r+r_1}} \frac{S_N(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\, d\xi, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Аналогично можно записать:

$$f^{(k)}(z') = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{r+r_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\, d\xi, \quad \forall z' \in B_r(z).$$

Тогда разность:

$$\left|S_N^{(k)}(z') - f^{(k)}(z')\right| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_{r+r_1}} \frac{\left|S_N(\xi) - f(\xi)\right| \cdot |d\xi|}{\left|\xi - z'\right|^{k+1}}.$$

Аналогично доказательству первой теоремы Вейерштрасса:

$$S_N \rightrightarrows f \text{ на } \Gamma_{r+r_1},$$

то есть:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N}: \ \forall N \geqslant N_1 \quad \left|S_N(\xi) - f(\xi)\right| < \varepsilon.$$

Выбрав положительное число ε и соответствующее число N, получим нужную сумму:

$$\left|S_N(z') - f(z')\right| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{r_1^{k+1}} \cdot 2\pi(r + r_1) = \varepsilon_1.$$

Следовательно:

$$S_N^{(k)}(z') \rightrightarrows f^{(k)}(z') \text{ на замкнутом круге } \overline{B_r(z)}.$$

То есть, было получено следующее:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)} \rightrightarrows f^{(k)}$$

равномерно строго внутри G, что и требовалось доказать. ■

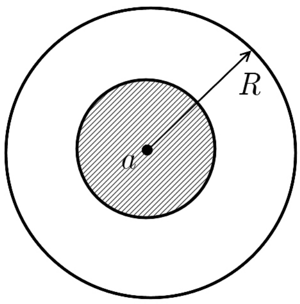

Рис. 5.4.

Следствие 5.1. *Пусть функция (см. рис. 5.4):*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad \forall z \in B_R(a).$$

Тогда:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n (z-a)^{n-1}, \quad \forall z \in B_R(a).$$

Следствие 5.2 (О единственности разложения функции в степенной ряд). *Пусть функция:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^n, \quad \forall z \in B_R(a).$$

Тогда:

$$b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Докажем следствие 5.2:

☐ Идея доказательства — будем почленно дифференцировать, затем подставим $z = a$.

Из следствия 5.1 получим:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f''(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} b_n \cdot n(n-1)(z-a)^{n-2}, \quad \forall z \in B_R(a),$$

$$\ldots$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} b_n \cdot n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(z-a)^{n-k}, \quad \forall z \in B_R(a).$$

Если в каждый ряд подставить далее $z = a$, то запишем:

$$f^{(k)}(a) = b_k \cdot k!,$$

что и требовалось доказать. ■

5.2. Теорема единственности

Теорема 5.2 (**Теорема единственности**). *Пусть G — область в $\mathbb{C}$. Пусть есть последовательность, такая, что:*

$$\{z_n\} \in \mathbb{C}, \quad N \in \mathbb{N},$$

где:

$$z_n \to z_o \in G, \quad n \to +\infty.$$

Имеется в виду, что здесь:

$$z_n \neq z_0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то есть последовательность нестационарна (см. рис. 5.5).

Пусть также функции:

$$f \in \mathbb{C}^1(G), \quad g \in \mathbb{C}^1(G),$$

причем:

$$f(z_n) = g(z_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда:

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in G.$$

Поясним данную теорему примером:

Пример 5.1. Есть функции:

$$f(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{iy},$$

$$g(z) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{C}), \quad g(x) = \mathrm{e}^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Тогда:

$$g(x) = \mathrm{e}^x = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

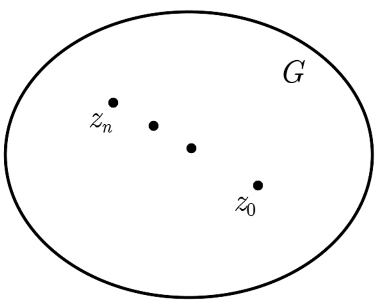

Рис. 5.5.

Например, происходит совпадение на последовательности:

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно, по теореме единственности:

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Пример 5.2. Есть функция:

$$f(z) = \sin^2(z) + \cos^2(z), \quad f(z) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{C}),$$
$$g(z) = 1, \quad g(z) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{C}).$$

Тогда воспользуемся теоремой единственности:

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

следовательно:

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Небольшое лирическое отступление: проведем «уничтожение тригонометрии».

Будем рассматривать функции:

$$f(z) = \sin\frac{1}{z}, \quad g(z) = 0.$$

Заметим, что:

$$\frac{1}{\pi n} \to 0 \Rightarrow \quad f\left(\frac{1}{\pi n}\right) = g\left(\frac{1}{\pi n}\right).$$

Тогда, воспользовавшись теоремой единственности, получим:

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

следовательно:

$$\sin\frac{1}{z} \equiv 0.$$

Проведем замену переменных:

$$\xi = \frac{1}{z} \Rightarrow \quad \sin\xi \equiv 0.$$

Таким образом, функция синуса не представляет собой всем известную синусоиду, а является прямой.

Следовательно, не существует тригонометрии, механики и так далее.

Где в данных рассуждениях ошибка?

Ответ — в том, что:

$$f(z) = \sin\frac{1}{z} \in \mathbb{C}^1\big(\mathbb{C} \setminus \{0\}\big) \Rightarrow \quad G = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Получается, что:

$$\frac{1}{\pi n} \to 0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

а значит, были нарушены условия теоремы единственности, и следовательно, тригонометрия все-таки существует.

Для доказательства теоремы единственности понадобится сформулировать и доказать следующую лемму:

Лемма 5.1 (Об изолированности нулей регулярной функции). *Если функция:*

$$f \in \mathbb{C}^1\big(B_r(a)\big),$$

причем $f(a) = 0$, то возможны только два случая:

1) *Либо:*

$$f(z) \equiv 0, \quad \forall z \in B_r(a),$$

2) *Либо:*

$$f(z) = (z-a)^k \cdot f_1(z), \quad k \in \mathbb{N},$$

где:

$$f_1(z) \in \mathbb{C}^1\big(B_r(a)\big), \quad f_1(a) \neq 0,$$

то есть:

$$f_1(z) \neq 0, \quad \forall z \in B_{r_1}(a), \quad r_1 > 0.$$

□ В доказательстве будет использоваться разложение в ряд Тейлора.

Так как:

$$f \in \mathbb{C}^1\big(B_r(a)\big),$$

то:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad \forall z \in B_r(a).$$

Тогда в одном случае получим:

$$0 = f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k)}(a) = \dots, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Значит:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

то есть:

$$f \equiv \text{ в } B_r(a),$$

что приводит к первому случаю из условия.

Инчае получается в другом случае — если:

$$0 = f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a), \quad f^{(k)}(a) \neq 0.$$

Тогда:

$$f(z) = c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots.$$

Вынесем множитель за скобки:

$$c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots = (z-a)^k \cdot \big(c_k + c_{k+1}(z-a) + \dots\big).$$

Обозначим:

$$f_1(z) = c_k + c_{k+1}(z-a) + \dots.$$

Значит, можно записать:

$$f_1 \in \mathbb{C}^1\big(B_r(a)\big).$$

Это приводит ко второму случаю из условия:

$$f_1(a) = c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \neq 0.$$

Лемма доказана. ■

Теперь перейдем к доказательству теоремы единственности (теорема 5.2):

☐ В доказательстве будет использована лемма об изолированности нулей регулярной функции.

Рассмотрим функцию (см. рис. 5.6):

$$h(z) = f(z) - g(z).$$

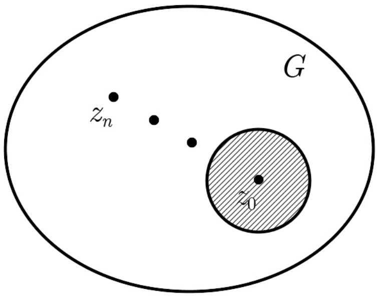

Рис. 5.6.

Тогда:

$$h \in \mathbb{C}^1(G), \quad h(z_n) = 0.$$

Значит, достаточно доказать, что:

$$h \equiv 0 \text{ в } G.$$

Так как функция h — непрерывна в точке $h(z_0) = 0$, $z_n \to z_0$, а также так как z_0 — нуль функции h, неизолированный от нулей в точках z_n, то по лемме 5.1:

$$h \equiv 0 \text{ в любом круге } B_r(z_0) \subset G.$$

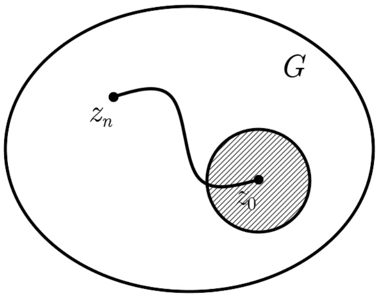

Рис. 5.7.

Распространим результат на всю область (см. рис. 5.7). Рассмотрим произвольную точку $z \in G$.

Так как G является областью, то можно выбрать кривую Γ, соединяющую точки z и z_0 внутри G.

Так как Γ — компакт, то функция:

$$\rho\big(\xi, \partial G\big), \quad \xi \in \Gamma$$

является непреырвной по ξ.

Значит, данная функция достигает:

$$\inf \rho\big(\xi, \partial G\big) = d > 0, \quad \xi \in \Gamma.$$

Тогда из следующего открытого покрытия кривой Γ:

$$\bigcup_{\xi \in \Gamma} B_d(\xi)$$

можно выбрать конечное подпокрытие, причем так, чтобы нашлись точки:

$$\big\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_l\big\} \subset \Gamma : \ \Gamma \subset \bigcup_{j=0}^{l} B_d(\xi_j),$$

причем центр следующего шара должен попадать в предыдущий шар:

$$\xi_{j+1} \in B_d(\xi_j), \quad \xi = 1, \ldots, l.$$

Пусть также:

$$z_0 = \xi_0, \quad \ldots, \quad z = \xi_l.$$

Тогда из доказанного выше следует:

$$h \equiv 0 \text{ в круге } B_d(\xi_0).$$

Так как:

$$\xi \in B_d(\xi_0),$$

то ξ_1 — неизолированный нуль функции h.

Следовательно, по лемме 5.1:

$$h \equiv 0 \text{ в круге } B_d(\xi_1),$$

и так далее.

Проделав данный переход k раз, получим в итоге:

$$h \equiv 0 \text{ в круге } B_d(\xi_l) = B_d(z).$$

В силу произвольности выбора точки z, получим окончательно:

$$h \equiv 0, \quad \forall z \in G,$$

что и требовалось доказать. ■

5.3. Первообразная

Определение 5.2. Пусть G — область в $\mathbb{C}$, а функция f такова:

$$f : \ G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

Тогда функция F называется **первообразной** для функции f, если:

$$F'(z) = f(z), \quad \forall z \in G.$$

Заметим, что если F_1 и F_2 являются первообразными для функции f в G, то:

$$F_1' = F_2' = f \text{ в } G,$$

то есть:

$$F_1' - F_2' = h' = 0 \text{ в области } G.$$

Но в таком случае:

$$h'(z) = u_x'(x, y) + iv_x'(x, y) = 0,$$

следовательно:

$$u_x = v_x = 0 \text{ в } G.$$

Используя условия Коши–Римана для функции h, получим в G:

$$\begin{cases} u_x = v_y = 0, \\ u_y = -v_x = 0. \end{cases}$$

Следовательно:

$$u = c_1 \in \mathbb{R}, \quad v = c_2 \in \mathbb{R}.$$

В итоге запишем:

$$F_1 - F_2 = c \in \mathbb{C},$$

что означает, что две разные первообразные в области отличаются на константу.

Теорема 5.3 (**О существовании первообразной**). *Пусть G — область в $\mathbb{C}$, а функция f такова, что (см. рис. 5.8):*

$$f \in \mathbb{C}(G),$$

причем для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset G$ выполнено равенство:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Также пусть кривая $\Gamma_{a,z}$ является кусочно-гладкой кривой в G, связывающей точки a и z.

Тогда функция:

$$\forall z \in G \quad F(z) = \int\limits_{\Gamma_{a,z}} f(\xi)\,d\xi \text{ для фиксированной точки } a \in G$$

является одной из первообразных для f в области G (см. рис. 5.9).

☐ В доказательстве будет использовано определение производной.

Первая часть: покажем, что функция F определена корректно, то есть не зависит от выбора кривой $\Gamma_{a,z}$ (см. рис. 5.10).

Выберем произвольную точку $z \in G$. Пусть $\Gamma_{a,z}$ и $\tilde{\Gamma}_{a,z}$ — две разные кусочно-гладкие кривые, соединяющие точки a и z в G.

Тогда объединение:

$$\Gamma_{a,z} \cup \tilde{\Gamma}_{a,z}$$

является также замкнутой кривой в G. Следовательно, учитывая ориентацию, запишем по условию:

$$\int\limits_{\Gamma_{a,z} \cup \tilde{\Gamma}^{-}_{a,z}} f(\xi)\,d\xi = 0.$$

Таким образом:

$$0 = \int\limits_{\Gamma_{a,z}} f(\xi)\,d\xi - \int\limits_{\tilde{\Gamma}_{a,z}} f(\xi)\,d\xi,$$

то есть:

$$\int\limits_{\Gamma_{a,z}} f(\xi)\,d\xi = \int\limits_{\tilde{\Gamma}_{a,z}} f(\xi)\,d\xi.$$

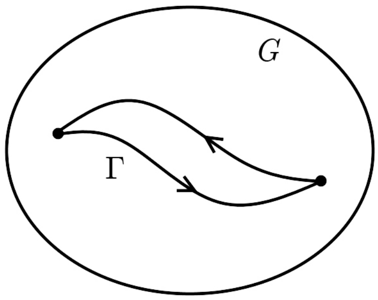

Рис. 5.8.

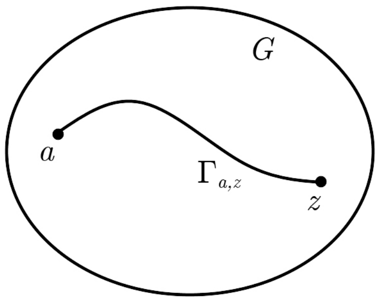

Рис. 5.9.

Первая часть доказательства завершена.

Вторая часть: для произвольной точки $z \in G$ (см. рис. 5.11) берем произвольную кусочно-гладкую кривую Γ от a до z в G.

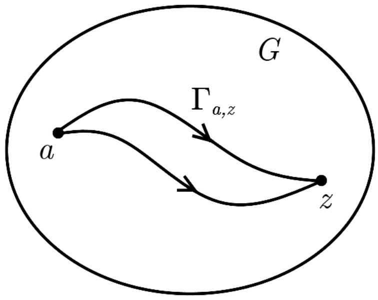

Рис. 5.10.

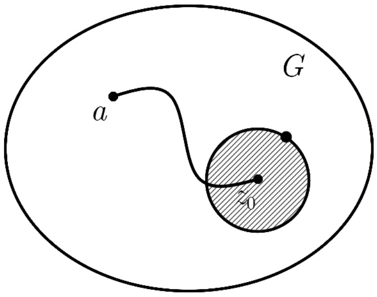

Рис. 5.11.

Пусть для некоторого $\delta > 0$ круг:

$$B_\delta(z) \subset G.$$

Для произвольной Δz:

$$\Delta z \in \mathbb{C}: \ \left|\Delta z\right| < \delta.$$

Рассмотрим:

$$F\big(z + \Delta z\big) = \int\limits_{\Gamma_{a,z} \cup [z, z+\Delta z]} f(\xi)\, d\xi,$$

то есть рассматриваемая кривая от точки a до точки $(z + \Delta z)$ состоит из кривой $\Gamma_{a,z}$ и отрезка от z до $z + \Delta z$.

Тогда запишем разность:

$$\left|\frac{F\big(z+\Delta z\big) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z} \int\limits_{[z,z+\Delta z]} f(\xi)\, d\xi - f(z)\right|.$$

Так как:

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int\limits_{[z,z+\Delta z]} f(\xi)\, d\xi,$$

то есть при следующей параметризации:

$$\xi(t) = z + t\Delta z, \quad t \in [0,1], \quad d\xi = \Delta z\, dt$$

можно записать:

$$\int\limits_{[z,z+\Delta z]} d\xi = \int\limits_0^1 \Delta z\, dt = \Delta z \int\limits_0^1 dt = \Delta z.$$

Тогда:

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int\limits_{[z,z+\Delta z]} f(\xi)\, d\xi = \frac{f(z)}{\Delta z} \int\limits_{[z,z+\Delta z]} d\xi.$$

Значит, можно переписать:

$$\left|\frac{1}{\Delta z} \int\limits_{[z,z+\Delta z]} f(\xi)\, d\xi - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z} \int\limits_{[z,z+\Delta z]} \big(f(\xi) - f(z)\big)\, d\xi\right|.$$

Оценим сверху:

$$\left|\frac{1}{\Delta z} \int\limits_{[z,z+\Delta z]} \big(f(\xi) - f(z)\big)\, d\xi\right| \leqslant \frac{1}{\Delta z} \int\limits_{[z,z+\Delta z]} \big|f(\xi) - f(z)\big|\big|d\xi\big|.$$

Так как функция f — непрерывна в точке z, то:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\sigma > 0: \ \forall\xi \in G \quad \big|\xi - z\big| < \sigma \quad \big|f(\xi) - f(z)\big| < \varepsilon.$$

Если для произвольного положительного числа ε выбрать соответствующее ему положительное число σ, причем если также считать, что $\sigma < \delta$, то можно записать:

$$\left|\frac{F\big(z + \Delta z\big) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| < \varepsilon, \quad \forall\Delta z: \ \big|\Delta z\big| < \sigma.$$

Таким образом:

$$\exists \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F\big(z + \Delta z\big) - F(z)}{\Delta z} = f(z),$$

что и требовалось доказать. ■

5.4. Ряды Лорана

Определение 5.3. Рядом Лорана называется ряд вида:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n \in \mathbb{C}, \quad a \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Определение 5.4. Считается, что ряд Лорана — **сходится** тогда и только тогда, когда сходится ряд:

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n \tag{5.1}$$

и ряд:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n. \tag{5.2}$$

Вполне логично следует задать вопрос — на каком множестве сходится ряд Лорана?

Заметим, что ряд 5.2 является обычным степенным рядом. Он, как известно, сходится в круге $B_R(a)$, где R — радиус сходимости (см. рис. 5.12).

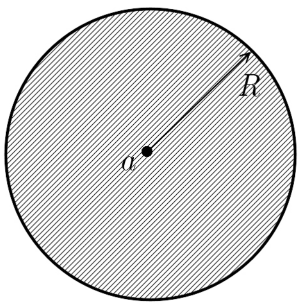

Рис. 5.12.

Для радиуса сходимости известна также **формиула Коши-Адамара**:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Для ряда 5.1 проведем замену переменных:

$$\xi = \frac{1}{\xi - a}.$$

Тогда данный ряд будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} \xi^k, \quad k = -n.$$

Получился степенной ряд. Он сходится в круге $B_{R_1}(0)$, где радиус сходимости определяется теперь так:

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|c_{-k}|}}.$$

Так как $|\xi| < R_1$, то:

$$\frac{1}{|z-a|} < R_1,$$

что равносильно следующему:

$$\left|z-a\right| > \frac{1}{R_1} = r.$$

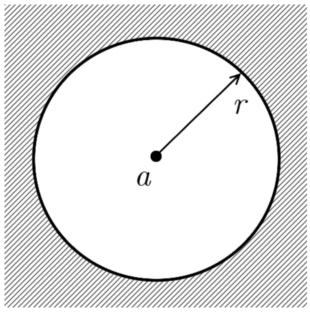

Рис. 5.13.

Таким образом, получили, что ряд 5.1 сходится во внешности круга $B_r(a)$ (см. рис. 5.13), где:

$$r = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|c_{-k}|}.$$

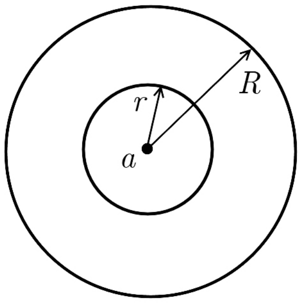

Рис. 5.14.

Возможны три случая:

1) $r > R$ — ряд Лорана нигде не сходится;
2) $r = R$ — ряд Лорана может сходиться в некоторых точках:
$$\Big\{\left|z-a\right| = r = R\Big\}.$$
3) $r < R$ — ряд Лорана сходится в кольце (см. рис. 5.14):
$$V_{r,R}(a) = \Big\{z:\ r < \left|z-a\right| < R\Big\},$$
причем не исключено, что могут достигаться крайние значения:
$$0 \leqslant r < R \leqslant +\infty.$$