ЛЕКЦИЯ 9

Приращение аргумента z вдоль контура (продолжение). Регулярные ветви многозначных функций $\{\sqrt[n]{z}\}$ и $\operatorname{Ln} z$

9.1. Выделение непрерывных ветвей многозначной функции $\operatorname{Arg} z$

На прошлой лекции было дано следующее определение:

Определение 9.1 (Приращение $\arg\gamma$ на отрезке $[0,1]$)**.** Пусть

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma \in C^1([0,1]), \quad \gamma(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,1].$$

Тогда

$$\Delta_{[0,1]} \arg\gamma(t) \equiv \int_0^1 \operatorname{Im} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt$$

называется **приращением** $\arg\gamma$ **на отрезке** $[0,1]$.

На семинарах и в заданиях приращение угла будет считаться проще. Интеграл будет равен разности между начальным положением угла и конечным

$$\Delta_{[0,1]} \arg\gamma(t) = \varphi_1 - \varphi_0.$$

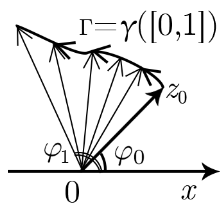

Рис. 9.1.

Утверждение 9.1 (Логарифмическое свойство $\Delta_{[0,1]} \arg\gamma(t)$)**.** Пусть

$$\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in C^1([0,1]), \quad \gamma_1(t) \neq 0, \quad \gamma_2(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,1].$$

Тогда

$$\Delta_{[0,1]} \arg(\gamma_1(t)\cdot\gamma_2(t)) = \Delta_{[0,1]} \arg\gamma_1 + \Delta_{[0,1]} \arg\gamma_2,$$

$$\Delta_{[0,1]} \arg\frac{\gamma_1(t)}{\gamma_2(t)} = \Delta_{[0,1]} \arg\gamma_1(t) - \Delta_{[0,1]} \arg\gamma_2(t).$$

☐ Из определения 9.1

$$\Delta_{[0,1]} \arg(\gamma_1(t)\cdot\gamma_2(t)) = \int_0^1 \operatorname{Im}\left(\frac{(\gamma_1\cdot\gamma_2)'}{\gamma_1\cdot\gamma_2}\right) dt = \int_0^1 \operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_1'\cdot\gamma_2 + \gamma_2'\cdot\gamma_1}{\gamma_1\cdot\gamma_2}\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_1'}{\gamma_1} + \frac{\gamma_2'}{\gamma_2}\right) dt = \int_0^1 \operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_1'}{\gamma_1}\right) + \int_0^1 \operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_2'}{\gamma_2}\right).$$

Аналогично для γ_1/γ_2. ■

Определение 9.2 (Приращение аргумента на кривой)**.** Пусть Γ — кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{C}$, не проходящая через 0 ($0 \notin \Gamma$). Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ — одна из допустимых параметризаций Γ. Тогда можно рассмотреть приращение

$$\Delta_\Gamma \arg z \equiv \Delta_{[0,1]} \arg \gamma(t) = \int_0^1 \operatorname{Im} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)\,dt}{\gamma(t)} = \begin{vmatrix} z = \gamma(t), \\ dz = \gamma'(t)\,dt \end{vmatrix} = \operatorname{Im} \int_\Gamma \frac{dz}{z},$$

т. е. показано, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора параметризации $\gamma(t)$, т. к. этим свойством обладает интеграл $\int\limits_\Gamma \frac{dz}{z}$.

Замечание 9.1 (О приращении аргумента вдоль замкнутой кривой)*.* Если Γ — кусочно-гладкая замкнутая кривая, то приращение

$$\Delta_\Gamma \arg z = 2\pi k(\Gamma), \quad \text{где } k(\Gamma) = \mathbb{Z},$$

т. к. это разность углов в одной точке, которая является началом и концом.

Теорема 9.1 (О выделении непрерывных ветвей $\operatorname{Arg} z$)**.** *Пусть в области $G \subset \mathbb{C}$ нет простых (без самопересечений) замкнутых кусочно-гладких кривых, охватывающих точку* 0*. Тогда в G можно выделить непрерывные ветви многозначной функции* $\operatorname{Arg} z$*.*

□ Доказательство конструктивное — явно предъявляется непрерывная ветвь $\operatorname{Arg} z$.
Рассмотрим функцию вида

$$\varphi(z) \equiv \varphi_0 + \Delta_\Gamma \arg z,$$

где в области G зафиксирована начальная точка z_0.

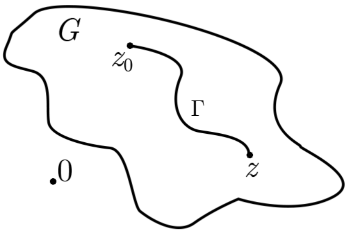

Рис. 9.2.

В этой точке выбран угол $\varphi_0 \in \operatorname{Arg} z_0$. Из условия теоремы ясно, что $0 \notin G$. Γ — это произвольная кусочно-гладкая кривая, связывающая точки z_0 и z внутри области G.

1) Докажем, что определение $\varphi(z)$ корректно, т. е. что $\varphi(z)$ действительно не зависит от Γ. Из условия теоремы следует, что $\varphi(z)$ не зависит от выбора кривой Γ, соединяющей точки z_0 и z в G. От противного: допустим, взяты две разные кривые от z_0 до z — Γ и Γ_1.
В этом случае $\Gamma_1 \cup \Gamma^-$ — замкнутая кривая в области G. Рассмотрим приращение по кривой

$$\Delta_{\Gamma_1 \cup \Gamma^-} \arg z = \operatorname{Im} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma^-} \frac{dz}{z}.$$

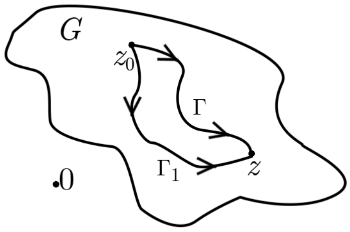

Рис. 9.3.

Т. к. функция $\dfrac{1}{z}$ не имеет особых точек внутри $\Gamma_1 \cup \Gamma^-$, то по теореме Коши

$$\int \frac{dz}{z} = 0, \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{dz}{z}, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im} \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \operatorname{Im} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{dz}{z} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_{\Gamma} \arg z = \Delta_{\Gamma_1} \arg z.$$

2) Докажем теперь, что $\varphi(z)$ — это ветвь аргумента.
Из определения величины

$$\Delta_{\Gamma} \arg z \quad \Rightarrow \quad (\varphi_0 + \Delta_{\Gamma} \arg z) \in \operatorname{Arg} z,$$

т. е. один из углов в точке z, а значит

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \Delta_{\Gamma} \arg z$$

— ветвь (выборка) $\operatorname{Arg} z$.

3) Покажем, что $\varphi(z)$ непрерывная.
Т. к.

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \operatorname{Im} \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z},$$

где второе слагаемое — это мнимая часть от первообразной функции $\dfrac{1}{z}$. Выполняется условие теоремы о существовании первообразной: в области функция регулярная, и интеграл от нее по любой замкнутой кривой — 0, потому существует первообразная, задаваемая соответствующим интегралом $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{dz}{z}$. Это регулярная в области G функция, тогда её мнимая часть — гармоническая, а значит её мнимая часть, в частности, непрерывная.

■

Теорема 9.2 (Связь между непрерывными ветвями $\operatorname{Arg} z$)**.** *Если в области $G \subset \mathbb{C}$ можно выделить непрерывную ветвь φ многозначной функции $\operatorname{Arg} z$, то все остальные непрерывные ветви $\operatorname{Arg} z$ в G имеют вид*

$$\varphi_k(z) = \varphi(z) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

□ Пусть φ, φ_k — непрерывные ветви

$$\operatorname{Arg} z \quad \Rightarrow \quad h(z) = \varphi_k(z) - \varphi(z).$$

$h(z)$ — непрерывная функция, причём

$$h(z) = 2\pi \cdot k(z) \quad \forall z \in G, \quad \text{где } k(z) \in \mathbb{Z}.$$

Т. к. $h(z)$ — непрерывная на связном множестве G, то её множество значений связно, а значит $h(z) \equiv 2\pi k$, где k — константа, не зависящая от z, $k \in \mathbb{Z}$. ■

9.2. Выделение регулярных ветвей многозначных функций $\{\sqrt[n]{z}\}$ и $\operatorname{Ln} z$

Рассмотрим $\{\sqrt[n]{z}\}$, если $z \neq 0$. Тогда

$$\{\sqrt[n]{z}\} = \{\sqrt[n]{|z|} \exp \frac{i(\arg_{\text{гл}} z + 2\pi k)}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots . n-1\}.$$

$$\{\sqrt[n]{z}\} : \mathbb{C} \backslash \{0\} \to 2^{\mathbb{C}} \text{ — многозначная функция.}$$

Определим $\operatorname{Ln} z$.
Рассмотрим показательную функцию $z = \mathrm{e}^w$. Заметим, что $z \neq 0$, т. к.

$$|\,\mathrm{e}^w\,| = |\,\mathrm{e}^u \cdot \mathrm{e}^{iv}\,| = \mathrm{e}^u > 0.$$

Выражаем w через z :

$$|z| \cdot \mathrm{e}^{i \arg_{\text{гл}} z} = \mathrm{e}^u \cdot \mathrm{e}^{iv} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = \mathrm{e}^u, \\ \arg_{\text{гл}} z + 2\pi k = v, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u = \ln |z|, \\ \operatorname{Ln} z \equiv \{\ln |z| + i(\arg_{\text{гл}} z + 2\pi k)\}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\operatorname{Ln} z : \mathbb{C} \backslash \{0\} \to 2^{\mathbb{C}} \text{ — многозначная функция}$$

Вопрос: в каких областях можно выделить регулярные ветви $\{\sqrt[n]{z}\}$ и $\operatorname{Ln} z$?
Заметим, что

$$\forall z \in \mathbb{C} \backslash \{0\} : \{\sqrt[n]{z}\} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \mathrm{e}^{\frac{i \operatorname{Arg} z}{n}}, \qquad \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z,$$

т. е. видна связь с аргументом z, тогда если в области $G \in \mathbb{C}$ можно выделить непрерывную ветвь $\operatorname{Arg} z$:

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \Delta_\Gamma \arg z$$

(зафиксированы $z \in G$, $\varphi_0 \in \operatorname{Arg} z_0$), то тогда если в этой же области G рассмотреть

$$g(z) \equiv \sqrt[n]{|z|} \cdot \mathrm{e}^{\frac{i\varphi(z)}{n}}, \quad h(z) \equiv \ln |z| + i \cdot \varphi(z),$$

то видно, что g — непрерывная ветвь $\sqrt[n]{z}$ в G, h — непрерывная ветвь $\operatorname{Ln} z$ в G.

Теорема 9.3 (Об обратной функции для регулярной функции f)**.** *Пусть функция $f \in C^1(G)$, G — область в $\mathbb{C}$, причём $f'(z_0) \neq 0$ для некоторой $z_0 \in G$, причём $w_0 = f(z_0)$.*

Тогда для некоторых чисел $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ найдётся обратная к f функция

$$f^{-1} : B_\varepsilon(w_0) \to B_\delta(z_0),$$

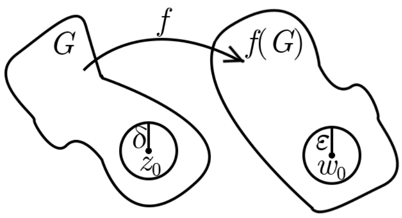

Рис. 9.4.

то есть

$$f(f^{-1}(w)) = w \quad \forall w \in B_\varepsilon(w),$$

где f^{-1} *регулярна в* $B_\varepsilon(w_0)$, *причём*

$$(f^{-1}(w))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad \forall w \in B_\varepsilon(w_0).$$

□ Для доказательства используется теорема из математического анализа о существовании обратной функции для отображения из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$.

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

т. е. отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x.y), \end{cases}$$

причем $u, v \in C^1(G)$, т. к. $f \in C^1(G)$. Считаем якобиан, учитывая, что т. к. f регулярна в области, то по условиям Коши–Римана $u_x = v_y$, $v_x = -u_y$,

$$J = \det \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = (f'(z))^2 \neq 0$$

при $z = z_0$, т. к. $f' = u'_x + iv'_x$. То есть якобиан $J \neq 0$ в точке (x_0, y_0), где $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда если

$$w_0 = u_0 + iv_0 \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = u(x_0, y_0), \quad v_0 = v(x_0, y_0),$$

то по теореме из математического анализа о существовании обратного отображения

$$\exists \delta > 0, \quad \exists \varepsilon > 0 : \exists \text{ отображение } x = x(u,v), \quad y = y(u,v) : B_\varepsilon(u_0, v_0) \to B_\delta(x_0, y_0),$$

обратное рассмотренному выше

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y), \end{cases}$$

причем

$$x = x(u,v) \in C_1(B_\varepsilon(u_0, v_0)),$$
$$y = y(u,v) \in C_1(B_\varepsilon(u_0, v_0)),$$

причем матрица

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

в точке (u, v) является обратной к матрице

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

в точке (x, y), где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тогда из курса линейной алгебры

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{v_y}{J} & -\frac{u_y}{J} \\ -\frac{v_x}{J} & \frac{u_x}{J} \end{pmatrix}, \quad \text{где } J = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$x_u = \frac{v_y}{J}, \qquad x_v = -\frac{u_y}{J}, \qquad y_u = -\frac{v_x}{J}, \qquad y_v = \frac{u_x}{J}$$

Тогда т. к. $v_y = u_x$ и $u_y = -v_x$, то $x_u = y_v$, $x_v = -y_u$. Поэтому обратная функция

$$f^{-1} = x(u, v) + iy(u, v)$$

дифференцируема в $B_\varepsilon(w_0)$.

Т. к. $x(u, v)$ и $y(u, v)$ являются C^1-гладкими, то функция

$$(f^{-1}(w))' = x_u + iy_u$$

непрерывна, т. е. f регулярна в $B_\varepsilon(w_0)$.

Т. к. по условиям Коши–Римана для f верно: $v_y = u_x$, то

$$(f^{-1}(w))' = \frac{v_y}{J} - \frac{iv_x}{J} = \frac{u_x - iv_x}{u_x^2 + v_x^2} = \frac{u_x - i \cdot v_x}{(u_x - i \cdot v_x)(u_x + iv_x)} = \frac{1}{u_x + iv_x} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}.$$

■

Теорема 9.4 (О выделении регулярных ветвей логарифма и корня)**.** *Пусть в области $G \subset \mathbb{C}$ нет простых замкнутых кусочно-гладких кривых, охватывающих точку 0. Тогда в G*

1) можно выделить регулярную ветвь

$$\sqrt[n]{z} : g(z) = \sqrt[n]{|z|} \cdot \mathrm{e}^{\frac{i(\varphi_0 + \Delta_\Gamma \arg z)}{h}},$$

где выбрана фиксированная точка $z_0 \in G$, $\varphi_0 \in \operatorname{Arg} z_0$. Также можно выделить регулярную ветвь для

$$\operatorname{Ln} z : h(z) = ln|z| + i(\varphi_0 + \Delta_\Gamma \arg z),$$

2) все остальные регулярные ветви $\sqrt[n]{z}$ имеют следующий вид:

$$g_k(z) = g(z) \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi ki}{n}}, \quad \text{где } k = 0, \ldots, n-1,$$

а для

$$\operatorname{Ln} z : h_k(z) = h_k(z) + 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

□ Для доказательства используется теорема об обратной функции.

1) Ранее (до теоремы об обратной функции) было доказано, что g — непрерывная ветвь $\sqrt[n]{z}$ в G, h — непрерывная ветвь $\operatorname{Ln} z$ в G (т. к. $\varphi_0+\Delta_\Gamma \arg z$ — непрерывная ветвь $\operatorname{Arg} z$ в условиях этой теоремы.
Заметим, что g — обратная функция к
$$w = z^n, \quad w'(z) \neq 0 \quad \forall z \neq 0,$$
а h — обратная функция к
$$w = \mathrm{e}^z, \quad w'(z) = \mathrm{e}^z \neq 0 \quad \forall z.$$
Следовательно, по теореме об обратной функции локально в окрестности каждой точки $z \in G$ g и h являются регулярными (в силу произвольности выбора $z \in G$).
2) (От противного) Пусть g, $\tilde{g}$ — две разные непрерывные ветви $\sqrt[n]{z}$. Тогда т. к. эти функции обратные к $w = z^n$, то
$$g^n(z) = z, \quad \tilde{g}^n(z) = z \quad \forall z \in G \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{g(z)}{\tilde{g}(z)} = 1 \quad \forall z \in G \quad \Rightarrow \quad \forall z \in G \ \frac{g(z)}{\tilde{g}(z)} \, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i k(z)}{n}}, \quad k(z) \in \mathbb{Z}$$
может зависеть от z.
Т. к. $g/\tilde{g}$ непрерывна на связном множестве G, то множество значений $\{\exp \frac{2\pi i k(z)}{n}\}$ связно, поэтому это только одно число, т. е. $k(z) = \mathrm{const}$, не зависящая от z.
Пусть h, $\tilde{h}$ — две непрерывные ветви $\operatorname{Ln} z$ в G. Тогда т. к. они обратные к $w = \mathrm{e}^z$, то
$$\mathrm{e}^{h(z)} = z, \qquad \mathrm{e}^{\tilde{h}(z)} = z \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{e}^{h(z)}}{\mathrm{e}^{\tilde{h}(z)}} = 1, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{h(z)-\tilde{h}(z)} = 1$$
Следовательно,
$$h(z) - \tilde{h}(z) = 0 + 2\pi i k(z), \quad k(z) \in \mathbb{Z}$$
и может зависеть от z. Но т. к. $h - \tilde{h}$ — непрерывна на связном множестве, тогда $\{2\pi i k(z)\}$ — связно и поэтому $k(z) \equiv k$ не зависит от z.

■

9.3. Выделение регулярных ветвей многозначных функций $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$ и $\operatorname{Ln} f(z)$

Ясно, что необходимы следующие условия:
1) $f(z) \in C^1(G)$, где G — область в $\mathbb{C}$, в которой рассматриваются регулярные ветви.
2) $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$.

Определение 9.3 (Приращение аргумента по кусочно-гладкой кривой)**.** Пусть Γ — кусочно-гладкая кривая в области G.
$$f \in C^1(G), \quad f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G.$$
Пусть $\gamma : [0,1] \to G$ — одна из допустимых параметризаций Γ. Тогда величина
$$\Delta_\Gamma \arg f(z) \equiv \Delta_{f(\Gamma)} \arg w = \Delta_{[0,1]} \arg f(\gamma(t)),$$
где $w = f(z)$, т. е. $\gamma : [0,1] \to G$, $\gamma([0,1]) = \Gamma$.

Если рассмотреть отображение

$$w(t) = f(\gamma(t)) : [0, 1] \to f(G),$$

то это также параметризация кусочно-гладкой кривой $f(\gamma)$.

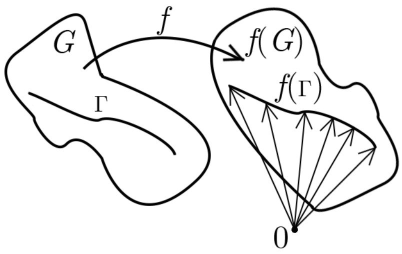

Рис. 9.5.