ЛЕКЦИЯ 11

Аналитическое продолжение регулярной функций

11.0.1. Производные от ветвей регулярных функций $\operatorname{Ln} f(z)$ и $\sqrt[n]{f(z)}$

Если $h(z)$ — регулярная ветвб многозначной функций $\operatorname{Ln} f(z)$ в области $G \subset \mathbb{C}$, то:

$$e^{h(z)} = f(z), \quad \forall z \in G.$$

$$\frac{d}{dz}: \quad e^{h(z)}\, h'(z) = f'(z),$$

$$h'(z) = \frac{f'(z)}{e^{h(z)}} = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

$$h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Для разных ветвей функций $\operatorname{Ln} f(z)$ будет одна и та же производная.

Если $g(z)$ — регулярная ветвб многозначной функций $\sqrt[n]{f(z)}$ в области $G \subset \mathbb{C}$, то:

$$g^n(z) = f(z), \quad z \in G.$$

$$\frac{d}{dz}: \quad n\, g^{n-1}(z) g'(z) = f'(z),$$

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{n\, g^{n-1}(z)} = \frac{f'(z) g(z)}{n\, g^n(z)} = \frac{f'(z)}{n\, f(z)} g(z),$$

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{n f(z)} g(z).$$

У разных ветвей функции $\sqrt[n]{f(z)}$ производные будут различными.

11.1. Аналитическое продолжение регулярной функций

Определение 11.1. Пусть функция $f(z) : M \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Область $G \subset \mathbb{C}, M \subset G$. Функция $g(z) \in C^1(G)$. Если

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in M,$$

то $g(z)$ — **аналитическое продолжение функции** $f(z) \subset M$ **в области** G.

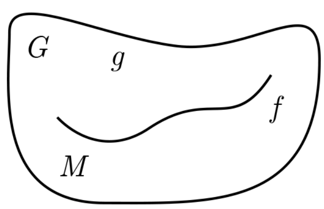

Рис. 11.1.

Пример 11.1. Пусть $M = \mathbb{R}$, $f(x)$ — одна из функций $\{e^x, \sin x, \cos x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\}$, $g(x)$ аналитическое продолжение функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$. Тогда эти функции будут регулярными в $\mathbb{C}$, и по теореме единственности аналитическое продолжение в $\mathbb{C}$ будет единственным.

Определение 11.2. Пусть функция $f : B_r(a) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, где $a \in \mathbb{C}, r > 0$, причем $f \in C^1(B_r(a))$. Тогда $(B_r(a), f)$ — **элемент с центром в точке** a.

Определение 11.3. Пусть есть два элемента $(B_r(a), f)$ и $(B_\rho(b), g)$, и выполняется:

$$B_r(a) \cup B_\rho(b) \neq \varnothing,$$

причем $f(z) = g(z) \quad \forall z \in B_r(a) \cup B_\rho(b)$.

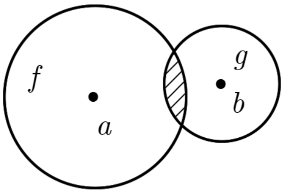

Рис. 11.2.

Тогда $(B_\rho(b), g)$ получен непосредственно аналитическим продолжением из элемента $(B_r(a), f)$.

Заметим, что, если заданы круги $B_r(a)$ и $B_\rho(b)$ и функция f, то функция g в определении 3 определяется однозначно (по теореме единственности).

Определение 11.4. Два элемента $(B_r(a), f)$ и $(B_\rho(b), g)$ называют **эквивалентными**, если $a = b$, причем $f(z) = g(z) \quad \forall z$ из пересечения этих кругов.

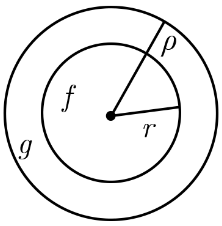

Рис. 11.3.

Определение 11.5. Пусть заданы элементы $(B_r(a), f)$ и $(B_\rho(b), g)$ и конечная последовательность элементов $(B_{r_j}(a_j), f_j), \quad j = 1, \ldots, k$ таких, что

$$r_1 = r, \quad a_1 = a, \quad f_1 = f,$$

$$r_k = \rho, \quad a_k = b, \quad f_k = g,$$

причем для каждого $j = 2 \ldots k$ элементы $(B_{r_{j-1}}(a_{j-1}), f_{j-1})$ являются непосредственными аналитическими продолжениями друг друга.

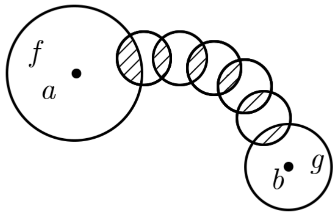

Рис. 11.4.

Тогда элемент $(B_\rho(b), g)$ получен из начального элемента $(B_r(a), f)$ **аналитическим продолжением по конечной цепочке элементов**.

Пример 11.2. Пусть задан первый элемент — круг с центром в точке (1;0) и радиусом 1.

$$E_1 = (B_1(1), g_1), \quad g_1(1) = 1,$$

где g_1 — регулярная ветвь $\sqrt[3]{z}$.

$$E_2 = (B_i(1), g_2), \quad g_2(i) = \mathrm{e}^{\frac{i\pi/2}{3}},$$

где g_2 — регулярная ветвь $\sqrt[3]{z}$.

$$E_3 = (B_1(-1), g_3), \quad g_3(-1) = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}},$$

где g_3 — регулярная ветвь $\sqrt[3]{z}$.

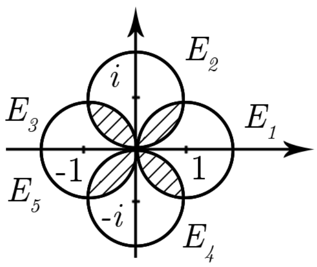

Рис. 11.5.

Построим другую цепочку элементов. Пусть

$$E_4 = (B_1(-i), g_4), \quad g_4(-i) = \mathrm{e}^{-\frac{i\pi/2}{3}},$$

где g_4 — регулярная ветвь $\sqrt[3]{z}$.

$$E_5 = (B_1(-1), g_5), \quad g_5(-1) = \mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{3}},$$

где g_5 — регулярная ветвь $\sqrt[3]{z}$.

Тогда цепочки элементов $E_1 \to E_2 \to E_3$ и $E_1 \to E_4 \to E_5$ удовлетворяют определению 5,но E_3 не эквивалентна E_5, т. к. $g_3(-1) \neq g_5(-1)$.

Определение 11.6. Пусть заданы элемент $(B_{r_0}(a), f)$ и кривая $\Gamma_{a,b}$ с началом в точке a и концом в точке b, $\Gamma_{a,b} \in \mathbb{C}$. Пусть $z : [a; l] \to \mathbb{C}$ — нормальная параметризация $\Gamma_{a,b}$ (т. е. параметр — длина кривой). Тогда аналитическое продолжение элемента $(B_{r_0}(a), f)$ вдоль кривой $\Gamma_{a,b}$ это элемент $(B_r z(l), f(l))$:

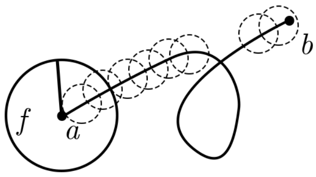

Рис. 11.6.

1) Если $\exists r \in (0; r_0]$.
2) Если $\exists (B_r z(s), f(s)), s \in [0; l]$. Радиусы всех кругов одинаковые. Количество кругов равно количеству точек на кривой.
3) Если существует непрерывная функция $\varphi : [0; l] \to \mathbb{C}$:

$$\forall s \in [0; l] \cup [s_0 - r; s_0 + r].$$

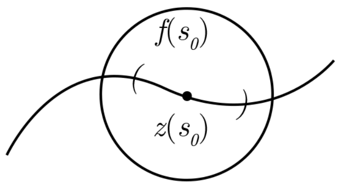

Рис. 11.7.

При пересечении кривой $\Gamma_{a,b}$ точки могут быть близко, но они соответствуют разным значениям параметра.
В этом случае элемент $(B_r z(l), f(l))$ получен из элемента $(B_{r_0}(a), f)$ путем аналитического продолжения вдоль кривой $\Gamma_{a,b}$.

Пример 11.3. Пусть задан начальный элемент:

$$E_1 = (B_1(1), g_1), \quad g_1(1) = 1,$$

где g_1 — регулярная ветвь $\sqrt[n]{z}$. Кривая $\Gamma_{1,-1}$ — верхняя единичная полуокружность.

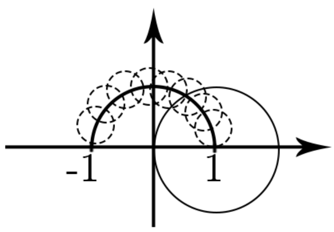

Рис. 11.8.

Пусть задана параметризация $z : [0; \pi] \to \mathbb{C}$

$$z(s) = \mathrm{e}^{is}.$$

1) $r = 1$.

2)
$$\varphi(z) = \sqrt[3]{|e^{is}|}\,\mathrm{e}^{\frac{is}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{is}{3}},$$
где $\varphi(s)$ — непрерывная функция; $s \in [0;\pi]$.

3)
$$(B_1(e^{is}), g_s), \quad g_s(\mathrm{e}^{is}) = e^{\frac{is}{3}},$$
где g_s — регулярная ветвь $\sqrt[3]{z}$.

После аналитического продолжения E_1 вдоль кривой $\Gamma_{a,b}$ получим:
$$(B_1(-1), g_\pi), \quad \text{где} \quad g(\pi) = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}.$$

Очевидно, что при аналитическом продолжении E_1 вдоль кривой
$$\{e^{is} : s \in [o;\pi]\}, \quad \tilde{z}(s) = e^{-is},$$
получим элемент $(B_1(-1), \tilde{g}_\pi)$, где
$$\tilde{g}_\pi(1) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}.$$

Теорема 11.1 (О единственности аналитического продолжения вдоль кривой)**.** *Пусть заданы элемент $(B_{r_0}(a), f)$ и кривая от a до b $\Gamma_{a,b}$. Тогда результат аналитического продолжения вдоль кривой $\Gamma_{a,b}$ зависит только от кривой и не зависит от выбора r и элементов $(B_r(z(s)), f_s)$.*

□ При доказательстве будем использовать определение 11.6.

Пусть есть два различных семейства элементов, дающих аналитическое продолжение вдоль $\Gamma_{a,b}$, т. е.:
$$r \in (0; r_0], \quad B_r(z(s), f_s), \quad \varphi : [0; l] \to \mathbb{C}.$$
$$\tilde{r} \in (0; r_0], \quad B_{\tilde{r}}(z(s), f_s), \quad \tilde{\varphi} : [0; l] \to \mathbb{C}.$$

Необходимо доказать, что $(B_r(z(l)), f_l)$ и $(B_{\tilde{r}}(z(l)), \tilde{f}_l)$ эквивалентны. Без ограничения общности будем считать, что $r < \tilde{r}$. Тогда:
$$\varphi(s) = f_0(z(s)) = f(z(s)) = \tilde{f}_0(z(s)), \quad \forall z \in [0; r], \quad f_0 = f, \quad \tilde{f}_0 = f.$$

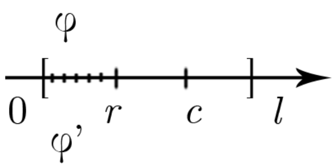

Рис. 11.9.

Определим число
$$c = \sup\{t \in [0; l] | \varphi(s) = \tilde{\varphi}(s), \forall s \in [0; t]\}.$$

Докажем, что $c < l$.

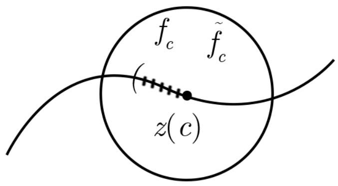

Рис. 11.10.

По условию:

$$f_c(z(s)) = \varphi(s), \quad s \in [c-r; c+r], \quad \tilde{f}_c(z(s)) = \tilde{\varphi}(s).$$

Но по определению c:

$$f_c(z(s)) = \varphi(s) = \tilde{\varphi}(s) = \tilde{f}_c(z(s)), \quad \forall s \in [c-r; c].$$

Т. к.

$$f_c, \tilde{f}_c \in (B_r(z(c))),$$

то по теореме единственности они совпадают во всех кругах:

$$f_c(z) = \tilde{f}_c(z), \quad \forall z \in B_r(z(c)).$$

Тогда справедливо:

$$f_c(z(s)) = \tilde{f}_c(z(s)), \quad s \in [c; c+r],$$

что противоречит определению величины c. Следовательно $c = l$ и выполняется:

$$\varphi(s) = \tilde{\varphi}(s), \forall s \in [0; l],$$

$$f_l(z(s)) = \varphi(s) = \tilde{\varphi}(s) = \tilde{f}_l(z(s)), \quad \forall s \in [l-r; l].$$

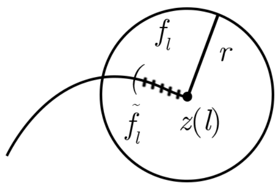

Рис. 11.11.

Таким образом, по теореме единственности:

$$f_l(z) = \tilde{f}_l(z), \quad \forall z \in B_r(z(l)).$$

Значит элементы $(B_r(z(l)), f_l)$ и $(B_{\tilde{r}}(z(l)), \tilde{f}_l)$ эквивалентны.

■

Теорема 11.2 (О равносильности элементов вдоль кривой и вдоль цепочки элементов)**.** *Определения аналитического продолжения элемента по конечной цепочке и по кривой равносильны.*

□ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть элемент $(B_\rho(b), g)$, получен из начального элемента $(B_{r_0}(a), f)$ аналитическим продолжением по цепочке элементов $(B_{r_j}(a_j), f_j), j = 1 \dots k$.

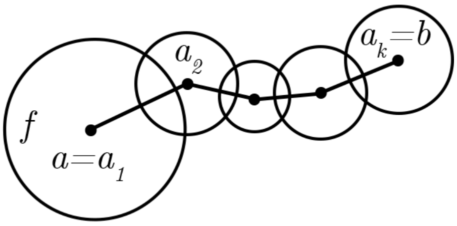

Рис. 11.12.

Рассмотрим кривую $\Gamma_{a,b}$ — ломаная, построенная из отрезков $[a_{j-1}; a_j], j = 2 \dots k$. Тогда найдется такое $r \in (0; r_0]$, что

$$\forall s_0 \in [0; l], \quad B_r(z(s_0)) \subset B_{r_{j_0}}(a_{j_0}),$$

для некоторого j. Тогда:

$$f_{s_0}(z) = f_{j_0}(z), \quad \forall z \in B_r(z(s_0)).$$

Определим функцию $\varphi(s)$ следующим образом:

$$\varphi(s) = f_s(z(s)).$$

Тогда получим регулярное продолжение вдоль кривой $\Gamma_{a,b}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Пусть заданы элемент $(B_{r_0}(a), f)$ и кривая $\Gamma_{a,b}$, вдоль которой этот элемент аналитически продолжается.

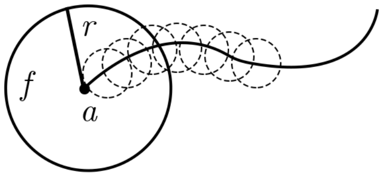

Рис. 11.13.

Т. е.:

$$\exists r \in (0; r_0],$$
$$\exists (B_r z(s), f_s),$$
$$\exists \varphi : [0; l] - \to \mathbb{C}, \quad \forall s_0 \in [0; l],$$
$$f_{s_0}(z(s)) = \varphi(s), \quad \forall s \in [0; l] \cap (s_0 - r; s_0 + r).$$

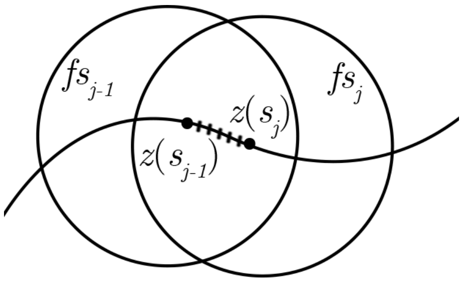

Рис. 11.14.

Выберем на отрезке $[0; l]$ значения

$$0 = s_1 < s_2 < \dots < s_k = l$$

так, что $|s_j - s_{j-1}| < r, \forall j = 2 \dots k$.

Из условия следует:

$$f_{s_{j-1}}(z(s)) = \varphi(s), \quad f_{s_j}(z(s)) = \varphi(s), \quad \forall s \in [s_{j-1}; s_j], \quad j = 2 \dots k.$$

Т. к.

$$f_{s_{j+1}}, f_{s_j} \in C^1(B_r(z(s_{j-1})) \cap B_r(z(s_0)),$$

то по теореме единственности:

$$f_{s_{j+1}}(z) = f_{s_j}(z), \quad \forall z \in (B_r(z(s_{j-1})) \cap B_r(z(s_0)).$$

Следовательно $(B_r(z(s_j)), f_{s_j})$ является непосредственным аналитическим продолжением элемента $(B_r(z(s_{j-1})), f_{s_{j-1}})$, т. е. было построено аналитическое продолжение по цепочке элементов.

■

Теорема 11.3 (О монодромии)**.** *Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, в которой есть элемент $(B_r(a), f)$, $B_r(a) \subset G$. Тогда $\forall b \in \Gamma$ результат аналитического продолжения $(B_r(a), f)$ вдоль кривой $\Gamma_{a,b}$ зависит только от точки b (не зависит от $\Gamma_{a,b}$). Т. е. итоговая функция в области G однозначная.*