ЛЕКЦИЯ 18

Приложения ТФКП

18.1. Приложения ТФКП к дискретной математике: вычисление комбинаторных сумм с помощью теоремы Коши о вычетах

Рассмотрим множество формальных рядов Лорана по переменной z. Мы говорим о формальных рядах, чтобы в дальнейшем не возникало проблем с их сходимостью.

$$S = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n; \quad z \in \mathbb{C}, \quad c_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

S — это множество последовательностей из комплексных коэффициенов. То есть ряд полностью задаётся его коэффициентами:

$$S = \{\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}; \quad C_n \in \mathbb{C}\}.$$

Определим на данном множестве операции сложения рядов и умножения на комплексное число. Таким образом, можем считать S линейным пространством. Рассмотрим простейший оператор coeff : $S \to \mathbb{C}$.

$$\operatorname{coeff}(\{C_n\}_n \in \mathbb{Z}) = C_{-1}$$

Этот оператор формальному ряду ставит в соответствие только одну координату C_{-1}, которая к тому же является константой. Из определения видно, что оператор coeff линейный на линейном пространстве S.

При подсчёте комбинаторных сумм часто возникает биномиальный коэффициент C_n^k, с которым крайне трудно работать при больших n. Покажем, что после замечаний, приведённых выше биномиальный коэффициент становится более пригодным для работы.

Например, биномиальный коэффициент необходим при разложении

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k 1^{n-k}; \quad z \in \mathbb{C}.$$

Заметим, что для $n \in \mathbb{N}, k \in \{0; \dots n\}$ биноминальный коэффициент можно выразить через новый линейный оператор

$$C_n^k = \operatorname{coeff} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}},$$

где в качестве функции для оператора coeff взято разложение $(1+z)^n$ в ряд Лорана, то есть в конечную сумму.

В дискретном анализе большинство выкладок сводится к различным комбинациям C_n^k, так что введённый формализм можно использовать для вычисления комбинаторных сумм.

Пример 18.1. Упростить и вычислить следующую сумму:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_{n+k}^k.$$

Решение Заменим один из биномиальных коэффициентов с помощью оператора coeff. Далее произведём преобразования, учитывая его линейность.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \operatorname{coeff}\left\{\frac{(1+z)^{n+k}}{z^{k+1}}\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\operatorname{coeff}\left\{\frac{(-1)^k C_n^k (1+z)^{n+k}}{z^{k+1}}\right\} =$$

$$= \operatorname{coeff}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k (1+z)^{n+k}}{z^{k+1}}\right\} =$$

$$= \frac{(1+z)^n}{z}\operatorname{coeff}\left\{\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-\frac{(1+z)}{z})^k\right\}.$$

Из под знака суммы можем вынести те множители, которые на зависят от k — индекса суммирования. В то же время под знаком суммирования максимально объединяем множители, зависящие от k. Так как

$$(1-t)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k t^k,$$

то можем продолжить преобразования суммы следующим образом, избавившись от знака суммирования:

$$\frac{(1+z)^n}{z}\operatorname{coeff}\left\{\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-\frac{(1+z)}{z})^k\right\} =$$

$$= \frac{(1+z)^n}{z}\operatorname{coeff}\left\{\left(1-\frac{1+z}{z}\right)^n\right\} =$$

$$= \frac{(1+z)^n}{z}\operatorname{coeff}\left\{\left(-\frac{1}{z}\right)^n\right\} =$$

$$= \operatorname{coeff}\left\{\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}(1+z)^n\right\}.$$

Далее, если раскрыть $(1+z)^n$ как бином Ньютона, то самая старшая степень в выражении - z^n. Оператор coeff ищет коэффициент перед $\frac{1}{z}$. А это будет $(-1)^n$. То есть:

$$\operatorname{coeff}\left\{\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}(1+z)^n\right\} =$$

$$= \operatorname{coeff}\left\{(-1)^n\frac{(1+z)^n}{z^{n+1}}\right\} =$$

$$= \operatorname{coeff}\left\{(-1)^n\left(\frac{1}{z^{n+1}}+\cdots+\frac{z^n}{z^{n+1}}\right)\right\} = (-1)^n\cdot 1.$$

В предыдущем случае нам удолось обойтись без теоремы Коши о вычетах. Рассмотрим следующий пример, где ТФКП пригодится.

Пример 18.2. Упростить и вычислить сумму

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k}C_{n+k}^{2k}.$$

Решение: Запишем биномиальный коэффициент с помощью оператора coeff:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k}C_{n+k}^{2k} = \\ = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k}\operatorname{coeff}\left\{\frac{(1+z)^{n+k}}{z^{2k+1}}\right\} = \\ = \operatorname{coeff}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k}\frac{(1+z)^{n+k}}{z^{2k+1}}\right\}.$$

Желательно внутри оператора оставить те множители, которые зависят только от n, а те, которые зависят от k оставить внутри. В таком случае упрощать выражение под суммой легче.

$$\operatorname{coeff}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k}\frac{(1+z)^{n+k}}{z^{2k+1}}\right\} = \\ = (-1)^n\frac{(1+z)^n}{z}\operatorname{coeff}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k}(1+z)^k}{(-1)^k z^{2k}}\right\} = \\ = (-1)^n\frac{(1+z)^n}{z}\operatorname{coeff}\left\{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4(1+z)}{-z^2}\right)^k\right\}.$$

Вспомним свойство геометрической прогрессии

$$\sum_{k=0}^{n}q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Учитывая это, выражение примет вид:

$$(-1)^n\frac{(1+z)^n}{z}\operatorname{coeff}\left\{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4(1+z)}{-z^2}\right)^k\right\} = \\ = (-1)^n\frac{(1+z)^n}{z}\operatorname{coeff}\left\{\frac{\left(\frac{4(1+z)}{-z^2}\right)^{n+1}-1}{\left(\frac{4(1+z)}{-z^2}\right)-1}\right\}.$$

Упростим знаменатель получившегося выражения:

$$\left(\frac{4(1+z)}{-z^2}\right)-1 = \frac{4+4z+z^2}{-z^2} = \frac{(z+2)^2}{-z^2}.$$

Продолжим упрощение исходного выражения:

$$(-1)^n \frac{(1+z)^n}{z} \operatorname{coeff} \left\{ \frac{\left(\frac{4(1+z)}{-z^2}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{4(1+z)}{-z^2}\right) - 1} \right\} =$$

$$= \frac{(-1)^n (1+z)^n}{z} \operatorname{coeff} \left\{ \frac{-z^2 \frac{4^{n+1}(1+z)^n+1}{(-1)^{n+1} z^{2n+2}} - 1}{(z+2)^2} \right\} =$$

$$= \frac{(-1)^n (1+z)^n}{z} \operatorname{coeff} \left\{ \frac{\frac{4^{n+1}(1+z)^{n+1}}{(-1)^n z^{2n}} + z^2}{(z+2)^2} \right\} =$$

$$= \frac{(-1)^n (1+z)^n}{z} \operatorname{coeff} \left\{ \frac{4^{n+1}(1+z)^{n+1}}{(-1)^n z^{2n} (z+2)^2} + \frac{z^2}{(z+2)^2} \right\} =$$

$$= \operatorname{coeff} \left\{ \frac{4^{n+1}(1+z)^{2n+1}}{z^{2n+1}(z+2)^2} + \frac{(-1)^n (z+1)^n z}{(z+2)^2} \right\}.$$

Обычно в комбинаторике используют асимптотическое разложение ряда и приблизительно вычисляют результат. При подсчёте сумм предложенным методом можем вычислить точный результат.

Замечаем, что из определения оператора coeff следует, что, если f регулярна в окрестности точки 0, то

$$\operatorname{coeff} = \operatorname*{Res}_0 .$$

Если ряд Лорана сходится к функции, которую можно явно выписать, то в этом частном случае получим вычет.

$$\operatorname{coeff} \left\{ \frac{4^{n+1}(1+z)^{2n+1}}{z^{2n+1}(z+2)^2} + \frac{(-1)^n (z+1)^n z}{(z+2)^2} \right\} = \operatorname*{Res}_0 \frac{4^{n+1}(1+z)^{2n+1}}{z^{2n+1}(z+2)^2} + \operatorname*{Res}_0 \frac{(-1)^n (z+1)^n \cdot z}{(z+2)^2}.$$

Обозначим выражения под ввчетами как $f(z)$ и $g(z)$. Исходя из того, что функция $g(z)$ регулярна в 0, второе слагаемое получившегося выражения обратится в 0.

Для $f(z)$ точка 0 - полюс порядка $2n+1$, то есть $\operatorname{Res}_0 f$, который напрямую считать долго. Используя теорему Коши о полной сумме вычетов, посчитаем значение первого слагаемого. У функции $f(z)$ особые точки в $\mathbb{C}$ — это 0, -2, ∞, других нет.

$$\operatorname*{Res}_0 f + \operatorname*{Res}_\infty f + \operatorname*{Res}_{-2} f = 0$$

Рассмотрим $\operatorname{Res}_\infty f$. Бесконечность — устранимая особая точка, так как

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 0;$$

$$\operatorname*{Res}_\infty f(z) = \lim_{z \to \infty} (f(\infty) - f(z)) = \lim_{z \to \infty} (-z \cdot f(z)) = 0.$$

Потому что в знаменателе функции $f(z)$ степень z на 2 больше, чем в числителе. Перейдём к вычислению вычета в точке -2. -2 — это полюс второго порядка для

$f(z)$.

$$\operatorname*{Res}_{-2} f(z) = (f(z)(z+2)^2)'|_{z=-2} =$$
$$= \left(\frac{4^{n+1}(1+z)^{2n+1}}{z^(2n+1)}\right)'\Bigg|_{z=-2} =$$
$$= 4^{n+1}\cdot \frac{(2n+1)(z+1)^{2n}z^(2n+1)-(2n+1)z^{2n}(1+z)^{2n+1}}{z^{4n+2}}\Bigg|_{z=-2} =$$
$$= 4^{n+1}(2n+1)\left(\frac{(z+1)^{2n}z-(1+z)^{2n+1}}{z^{2n+2}}\right)\Bigg|_{z=-2} =$$
$$= 4^{n+1}(2n+1)\left(\frac{(-1)^{2n}(-2)-(1)^{2n+1}}{(-2)^{2n+2}}\right) =$$
$$= \frac{4^{n+1}}{4^{n+1}}(2n+1)(-2+1) = -(2n+1)$$

$$\operatorname*{Res}_{0} f = 2n+1$$

Ответ: 2n+1.

18.2. Приложение ТФКП к анализу. Метод перевала для полуяения асимптотических оценок интегралов, зависящих от параметра

Рассмотрим функции следующего вида:

$$F(\lambda) = \int\limits_C \varphi(z)\,\mathrm{e}^{\lambda f(z)}\,dz; \quad \lambda > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Есть некоторая область $G \subset \mathbb{C}$, в которой выбрана некоторая кусочногладкая кривая C. При этом не обязательно кривая C является ограниченной. Функции φ, f регулярны в заданной области, $\varphi, f \in C(G)$. Задача состоит в том, чтобы найти приблизительное значение этой функции. Если рассматриваются функции $\varphi, f \in C(G)$

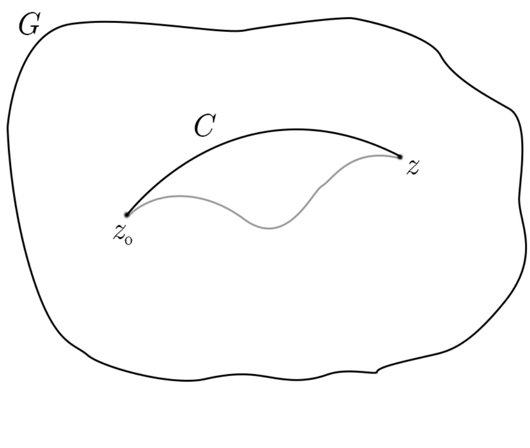

Рис. 18.1. Кривая в области G и её возможная деформация

регулярные в области G, то результат интегрирования зависит только от начальной и конечной точек. Это значит, что кривую C можно непрерывно деформировать, сохраняя концевые точки, таким образом, чтобы она находилась внутри области. При этом интеграл $F(\lambda)$ меняться не будет. Суть предлагаемого метода оценки интеграла состоит в том, что можно подобрать такую кривую вместо C, которая проходит через точку, в которой значение функции $F(\lambda)$ максимальное.

Например, в гиперболическом гиперболоиде есть точка, которая при рассмотрении проекции поверхности на перпендикулярные плоскости, может быть как абсолютным минимумом, так и абсолютным максимумом.

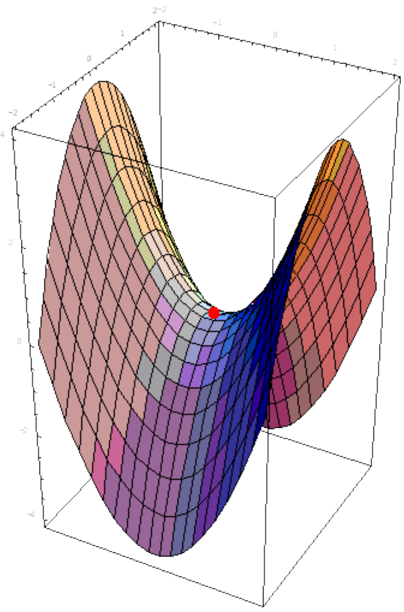

Рис. 18.2. Красным цветом обозначена седловая точка

Пробуем подобрать точку z_0 в области G и провести деформированную C через неё так, чтобы в ней $|f|$ принимал наибольшее значение на кривой C. На рисунке изображён график действительной части функции f и выбрана наиболее удачная точка z_0.

Можно сказать, то интеграл приблизительно равен значению функции в точке z_0, умноженному на длину кривой. При условии, что кривая после прохождения точки z_0 наиболее резко уходит вниз (как на гиперболическом параболоиде), а действительная составляющая функции принимает максимальное значение.

Итак, деформируем кривую C в области G так, чтобы она прошла через точку (если это возможно), в которой значение действительной части функции было наибольшим среди значений на кривой C.

В качестве примера не мог быть рассмотрен график параболоида, хотя на первый взгляд такая поверхность кажется вполне удачной, так как он не является графиком гармонической функции, в отличие от гиперболоида. У гармонических функций максимум достигается на границе области.

Определение 18.1. Точка (x_0,y_0) называется седловой точкой гармонической функции u в области G, если в этой точке касательная плоскость к графику u горизонтальна. $u'_x(x_0,y_0) = u'_y = 0$.

Заметим, что если

$$u = \operatorname{Re} f$$

в области G, которая является односвязной, то в седловой точке $z_0 \in G(z_0 = x_0 + iy_0)$ условием Коши-Римана будет

$$u_x = v_y = 0; \qquad u_y = -v_x = 0.$$

Из этого следует, что

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0' y_0).$$

Заметим, что по принципу максимума и минимума гармонических функций в точке z_0 не может быть ни локального, ни абсолютного максимума или минимума функции u и v в области G $(v = \operatorname{Im} f)$. Вспомним, что убывание или возрастание функции класса C^1 из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$ в данной точке происходит в направлении $\pm\,\mathrm{grad}$.

Если

$$u = \operatorname{Re} f; \qquad v = \operatorname{Im} f,$$

то у них в каждой точке G градиенты будут ортогональны $\mathrm{grad}\, u \perp \mathrm{grad}\, v$. Это следует из условия Коши-Римана. Так как

$$\mathrm{grad}\, u = (u_x, u_y); \qquad \mathrm{grad}\, v = (v_x, v_y),$$

условие Коши-Римана

$$u_x = v_y; \qquad u_y = -v_x.$$

Выразим градиент v через функцию u:

$$\mathrm{grad}\, v = (-u_y, u_x).$$

Тогда скалярное произведение

$$(\mathrm{grad}\, v, \mathrm{grad}\, u) = -u_x u_y + u_x u_y = 0.$$

Рассмотрим, как график гармонической функции ведёт себя в окрестности седловой точки. Так как в точке z_0 $f'(z_0) = 0$, то можем в окрестности этой точки раздожить функцию в ряд Тейлора. Этот ряд имеет следующий вид:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^p \cdot (b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \ldots); \quad p \geqslant 2.$$

Следовательно

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^p \cdot (b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \ldots).$$

Перейдём к полярным координатам, так как используя их легче изучить окрестность точки z_0. Используем следующую замену:

$$z - z_0 = \rho\, \mathrm{e}^{i\varphi}$$

$$b_k = r_k\, \mathrm{e}^{i\theta_k}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Подставим эти выражения в разложение.

$$f(z) - f(z_0) = \rho^p (r_0\, \mathrm{e}^{i(\theta_0 + p\varphi)} + \rho r_1\, \mathrm{e}^{i(\theta_1 + (p+1)\varphi)} + \ldots)$$

Теперь необходимо получить уравнения кривых, проходящих через точку z_0 в разных направлениях. Направление задаётся выражением $z - z_0 = \rho\, \mathrm{e}^{i\varphi}$, надо найти такой угол φ, по направлению которого кривая будет болше всего убывать (направление наикратчайшего спуска).

Получаем уравнения кривых вида

$$u = u_0 = \text{const}, v = v_0 = \text{const},$$

проходящих через точку z_0. Это линии уровня. Для этого в разложении f рассматриваем и действительную и мнимую часть от правой и левой части. Действительная часть:

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = \rho^p (r_0 \cos(\theta_0 + p\varphi) + \rho r_1 \cos(\theta_1 + (p+1)\varphi) + \dots).$$

Мнимая часть:

$$v(x, y) - v(x_0, y_0) = \rho^p (r_0 \sin(\theta_0 + p\varphi) + \rho r_1 \sin(\theta_1 + (p+1)\varphi + \dots)).$$

Если нас интересуют кривые

$$u = u(x_0, y_0) = \text{const}; \qquad v = v(x_0, y_0) = \text{const},$$

то для $u = \text{const}$

$$0 = u(x, y) - u(x_0, y_0) = \rho^p (r_0 \cos(\theta_0 + p\varphi) + \rho r_1 \cos(\theta_1 + (p+1)\varphi) + \dots).$$

Для $v = \text{const}$

$$0 = v(x, y) - v(x_0, y_0) = \rho^p (r_0 \sin(\theta_0 + p\varphi) + \rho r_1 \sin(\theta_1 + (p+1)\varphi) + \dots).$$

То есть

$$0 = r_0 \cos(\theta_0 + p\varphi) + \rho(\dots) + \dots;$$

$$0 = r_0 \sin(\theta_0 + p\varphi) + \rho(\dots) + \dots.$$

Значение u уменьшается, если $\cos\varphi < 0$. В обратном случае значение функции в данном направлении будет увеличиваться.

Для угла $\varphi \in [0; 2\pi]$ $\cos(\theta_0 + p\varphi)$ $2p$ раз меняет знак. По этой причине круг с центром z_0 разбивается на $2p$ секторов, в направлении которых значение u уменьшается и $2p$ секторов, в направлении которых значение увеличивается.

Вспомним, что быстрее всего значение u будут убывать в направлении $-\operatorname{grad} u$, то есть по касательной к кривой

$$v = v(x_0, y_0) = \text{const}.$$

Значение u быстрее всего убывает вдоль кривой с касательным ветором в направлении угла φ, для которого

$$\sin(\theta_0 + p\varphi) = 0;$$

$$\cos(\theta_0 + p\varphi) = -1.$$

Где θ_0 — это аргумент от $f^p(z_0)$. Так как нас интересуют места вблизи точки z_0, то при малых ρ все слагаемые после первого не будут менять знак суммы, а значит не будут менять знак sin и cos.

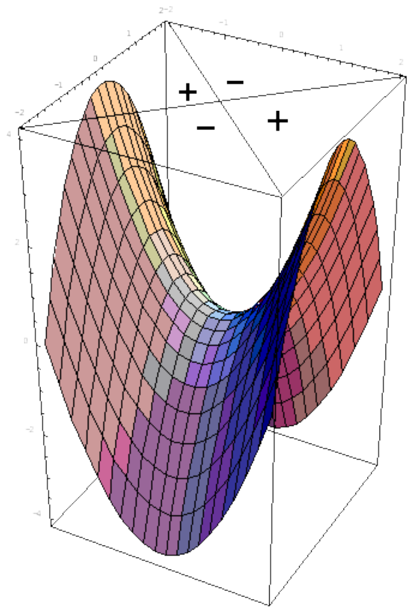

Рис. 18.3. Гиперболический параболоид и плоскость с изображёнными касательными к проекции графика. Сектора убывания и возрастания обозначены соответствующими знаками + и -.

Найдём угол

$$\theta_0 + p\varphi = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\varphi = -\frac{-\theta_0}{p} + \frac{\pi + 2\pi n}{p}.$$

Направление можно выбирать в каждом секторе. Заметим, что векторы, направленные вдоль φ являются биссектрисами секторов, вдоль которых происходит убывание значения u. В методе перевала рассматривается $p = 2$, то есть в этом случае

$$\varphi = \frac{\pi - \theta_0}{2} + \pi n, \quad n = \{0, 1\}.$$

Сформулируем основную теорему метода перевала без доказательства.

Теорема 18.1 (Метод перевала.). *Пусть G — односвязная область в $\mathbb{C}$, функции $\varphi, f \in C(G)$, число $\lambda > 0$, причём*

1) есть ровно одна седловая точка z_0 у функции $u = \operatorname{Re} f$ внутри G;

2) если L - кривая $v = v(z_0)$, где $v = \operatorname{Im} f$, то пусть верно $\exists \delta > 0, \quad M > 0$ такие, что $\forall z \in L \quad B_\delta(z_0) \quad u(x_0, y_0) - u(x, y) \geqslant M \quad z = x + iy$;

3) если $\int\limits_C |\varphi(z)|\, \mathrm{e}^{\lambda u(x,y)}\, |dz|$ — криволинейный интеграл первого рода сходится для неготорого $\lambda_0 > 0$, где C — кусочногладкая кривая в G;

4) Кривая C начинается и заканчивается в противоположных секторах, где значения u меньше, чем $u(x_0, y_0)$, либо C — неограниченная кривая, но она стремится при параметре $t \to +\infty$ к бесконечности в одном секторе убывания u и при параметре $t \to -\infty$ тоже стремится к бесконечности в другом секторе убывания u.

Если кривая C ограничена, то требуется, чтобы её начальную и конечную точки можно было соединить с L (кривой кратчайшего спуска) кривыми наименьшей *длины* Γ_0, Γ_1, *на которых выполняется оценка* $u(x_0, y_0) - u(x, y) \geqslant M$. *Тогда*

$$\int\limits_C \varphi(z)\,\mathrm{e}^{\lambda f(z)}\,dz = \mathrm{e}^{\lambda f(z_0)}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|f''(z_0)|}}\right)\varphi(z_0)\,\mathrm{e}^{i\varphi_n} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right);$$

$$\varphi_n = \frac{\pi - \theta_0}{2} + \pi n, \quad n = \{0, 1\};$$

$$\theta_0 = \arg f''(z_0).$$

Пример 18.3. Сделать асимптотическую оценку интеграла (функция Бесселя 3-го рода или функчия Ганкеля)

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_C \mathrm{e}^{ix\sin z - i\nu z}\,dz.$$

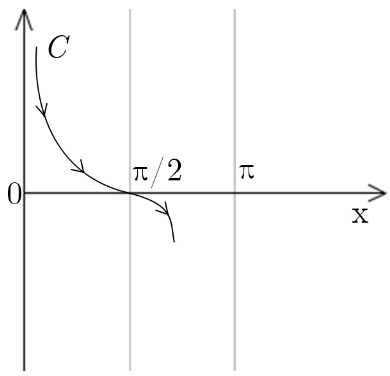

Рис. 18.4.

Решение:

$$\varphi(z) = \mathrm{e}^{-i\nu z};$$
$$f(z) = i\sin z;$$
$$\lambda = x.$$

Ищем седловую точку:

$$f'(z) = i\cos z = 0, \quad z = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Для $G = \{x + iy | 0 < x < \pi, y \in \mathbb{R}\}$ только одна седловая точка $z_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$f''(\frac{\pi}{2}) = -i\sin\frac{\pi}{2} = -i \neq 0;$$
$$\theta = \arg f''(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2};$$
$$\varphi_n = \frac{\pi - \theta}{2} + \pi n, \quad n = \{0, 1\};$$
$$\varphi_n = \left\{\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}.$$

Так как C направлена вниз, то берём $\frac{5\pi}{4}$.

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{e}^{ix}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{x\cdot 1}}\,\mathrm{e}^{-i\nu\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}^{\frac{i5\pi}{4}}\right) + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$