

ЛЕКЦИЯ 12

Полные аналитические функции $\operatorname{Ln} z$ и $\sqrt[n]{z}$. Особые точки аналитических функций

12.1. Полные аналитические функции $\operatorname{Ln} z$ и $\sqrt[n]{z}$

Определение 12.1 (Полная аналитическая функция). Пусть есть элемент $(B_r(a), f)$. Тогда **полной аналитической функцией**, порождённой этим элементом, называется \mathcal{F} — совокупность всех элементов, которые получаются из данного аналитическими продолжениями вдоль всех кривых, вдоль которых такое продолжение возможно.

Определение 12.2 (Аналитическая функция). **Аналитическая функция** — это связное подмножество элементов из \mathcal{F} (т.е. любой элемент из этого подмножества можно связать с любым другим через конечную цепочку элементов из этого подмножества).

Заметим, что объединение всех кругов элементов из определения 2 образует область (т.к. это будет открытое и связное множество).

Пусть берется точка $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда в круге $B_{|a|}(a)$ можно выделять регулярные ветви $\operatorname{Ln} z$ и $\sqrt[n]{z}$.

Если рассмотреть $(B_{|a|}(a), h_a)$ — элемент, где h_a — одна из регулярных ветвей $\operatorname{Ln} z$ в круге $B_{|a|}(a)$, то тогда этот элемент порожден многозначной функцией $\operatorname{Ln} z$.

Аналогично $(B_{|a|}(a), g_a)$ — элемент, порождённый многозначной функцией $\sqrt[n]{z}$, где g_a — регулярная ветвь $\sqrt[n]{z}$.

Теорема 12.1 (Об аналитическом продолжении вдоль кривых элементов $\operatorname{Ln} z$). Пусть $(B_{|a|}(a), h_a)$ — элемент, порождённый многозначной функцией $\operatorname{Ln} z$. Тогда

- 1) $\forall b \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \forall$ кривой $\Gamma_{a,b}$ от a до b в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ можно исходный элемент продолжить вдоль $\Gamma_{a,b}$.
- 2) Если есть элемент $(B_{|c|}(c), h_c)$ — элемент, порождённый $\operatorname{Ln} z$, то тогда \exists кривая $\Gamma_{a,c}$ такая, что данный элемент получается как аналитическое продолжение вдоль $\Gamma_{a,c}$ из $(B_{|a|}(a), h_a)$.

□ Для доказательства используется определение аналитического продолжения вдоль кривой.

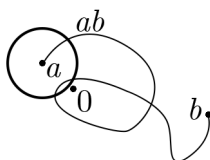


Рис. 12.1.

- 1) Т.к. $\Gamma_{a,b}$ — компакт, $0 \notin \Gamma_{a,b}$, то

$$\rho(0, \Gamma_{a,b}) = d > 0.$$

Лекция 12. Полные аналитические функции $\text{Ln } z$ и $\sqrt[n]{z}$

Пусть $z : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{C}$ — нормальная (т.е. длиной) параметризация $\Gamma_{a,b}$ (т.е. параметр s — длина части дуги). Выбираем точки $\{s_1, \dots, s_k\} \subset [0, \ell]$ так, что:

$$0 = s_1 < s_2 < \dots < s_k = \ell, \quad |s_j - s_{j-1}| < d \quad \forall j = 2, \dots, k.$$

Если обозначить $z(s_j) = z_j$, то видно, что

$$\Gamma_{z_{j-1}, z_j} \subset B_d(z_{j-1}) \quad \forall j = 2, \dots, k.$$

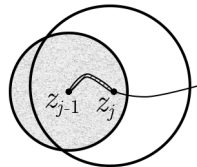


Рис. 12.2.

Определим функцию $\varphi : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{C}$ для начала на $[s_1, s_2]$ ($s_1 = 0$):

$$\varphi(s)_{\forall s \in [s_1, s_2]} \equiv h_a(z(s)).$$

Тогда в круге $B_d(z_j)$ определяем функцию h_{z_j} — регулярная ветвь $\text{Ln } z$ такая, что $h_{z_j}(z_j) = \varphi(s_j)$. Аналогично пошагово определим φ на всём отрезке $[0, \ell]$. При этом получим элементы, которые связаны через $\varphi : (B_d(z_j), h_{z_j})_{j=2, \dots, k}$. Тогда если выбрать элементы $(B_d(z(s)), h_{z(s)})$, где $h_{z(s)}$ — регулярная ветвь $\text{Ln } z$ такая, что

$$h_{z(s)}(z(s)) = \varphi(s), \quad s \in [0, \ell].$$

Если выбрать такие элементы, то они задают аналитическое продолжение элемента $(B_{|a|}(a), h_a)$ вдоль $\Gamma_{a,b}$.

- 2) Если $(B_{|c|}(c), h_c)$ — элемент, порождённый $\text{Ln } z$, то выбирается произвольная кривая $\tilde{\Gamma}_{a,c}$ от a до c в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. По пункту 1 можно продолжить стартовый элемент $(B_{|a|}(a), h_a)$ аналитически вдоль $\Gamma_{a,c}$ до $(B_{|c|}(c), \tilde{h}_c)$, где не факт, что ветвь логарифма \tilde{h}_c совпадет с ветвью логарифма h_c .

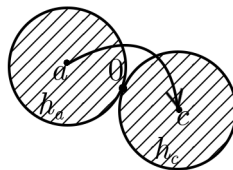


Рис. 12.3.

Т.к. \tilde{h}_c и h_c — две регулярные ветви многозначной функции $\text{Ln } z$ в круге $B_{|c|}(c)$, то они связаны следующим соотношением: $h_c = \tilde{h}_c + 2\pi ki$, где $k \in \mathbb{Z}$ — константа, не зависящая от точек z .

Тогда добавим к кривой $\tilde{\Gamma}_{a,c}$ окружность $\tilde{\tilde{\Gamma}}_{a,c}$ с центром 0 и радиусом $|c|$, которая k раз проходит 0. Тогда $\tilde{\Gamma}_{a,c} \cup \tilde{\tilde{\Gamma}}_{a,c}$ будет искомой $\Gamma_{a,c}$.

■

Следствие 12.1 (Вид полной аналитической функции $\operatorname{Ln} z$). *Полная аналитическая функция $\operatorname{Ln} z$ состоит из совокупности элементов следующего вида: $(B_{|a|}(a), h_a)$, $a \neq 0$, где h_a — какая-то регулярная ветвь $\operatorname{Ln} z$ в $B_{|a|}(a)$.*

Аналогично доказываются следующие теоремы и следствия.

Теорема 12.2 (Об аналитическом продолжении вдоль кривых элементов $\sqrt[n]{z}$). *Пусть $(B_{|a|}(a), g_a)$ — элемент $\sqrt[n]{z}$. Тогда*

- 1) $\forall b \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \forall \Gamma_{a,b}, 0 \notin \Gamma_{a,b}$ этот элемент аналитически продолжается вдоль $\Gamma_{a,b}$.
- 2) Если есть элемент $(B_{|c|}(c), g_c)$ — элемент $\sqrt[n]{z}$, то $\exists \Gamma_{a,c}$ такая, что этот элемент получается аналитическим продолжением вдоль $\Gamma_{a,c}$ из $(B_{|a|}(a), g_a)$

Следствие 12.2 (Вид полной аналитической функции $\sqrt[n]{z}$). *Полная аналитическая функция $\sqrt[n]{z}$ состоит из совокупности элементов $(B_{|a|}(a), g_a)$, $a \neq 0$, где g_a — какая-то регулярная ветвь $\sqrt[n]{z}$ в $B_{|a|}(a)$.*

Замечание 12.1 (Вид полной аналитической функции z^b). Аналогично полная аналитическая функция z^b , где $b \in \mathbb{C}$ фиксирована, $z \neq 0$, состоит из совокупности элементов $(B_{|a|}(a), f_a)$, $a \neq 0$, где $f_a(z) = e^{bh_a(z)}$, где h_a — регулярная ветвь $\operatorname{Ln} z$ в $B_{|a|}(a)$.

Пример 12.1 (Риманова поверхность полной аналитической функции $\operatorname{Ln} z$). Напомним, что

$$h_0(z) = \ln |z| + i \cdot \arg_{\text{гЛ}} z, \quad \text{где } 0 \leq \arg_{\text{гЛ}} z < 2\pi,$$

— одна из регулярных ветвей $\operatorname{Ln} z$ на множестве $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$,

$$h_k(z) = \ln |z| + i(\arg_{\text{гЛ}} z + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

— остальные регулярные ветви $\operatorname{Ln} z$ на $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.

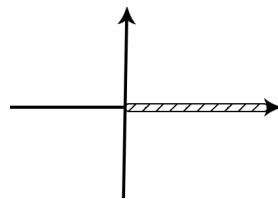


Рис. 12.4.

Будем различать точки $z_k = r \cdot e^{i(\varphi_0 + 2\pi k)}$ для разных $k \in \mathbb{Z}$, где $\varphi_0 = \arg_{\text{гЛ}} z_k$, т. е. определяем множества вида

$$G_k \equiv \{r \cdot e^{i\varphi} \mid r > 0, \varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi\},$$

считаем G_k непересекающимися.

Рассматриваем

$$h_k(z) \equiv \ln r + i\varphi, \quad z \in G_k.$$

Далее

$$G = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} G_k,$$

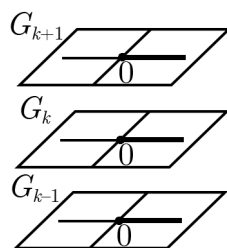


Рис. 12.5.

h на G :

$$h|G_k = h_k.$$

Определим систему окрестностей для каждой точки $z \in G$.

Если $z \in G_k$, $z \notin (0 + \infty]$, то

$$U(z) \equiv \{|z'| < \varepsilon\}, \quad \text{где } d = \rho(z, [0, +\infty)) \quad \forall \varepsilon \in (0, d).$$

Если

$$z \in G_k, \quad z = r \cdot e^{i(0+2\pi k)},$$

т.е. z лежит на верхнем берегу разреза, то тогда

$$U_\varepsilon(z) = \{|z' - z| < \varepsilon, \quad \text{Im } z' \geq 0\} \cup \{|\tilde{z} - z'| < \varepsilon, \quad \text{Im } z' < 0\},$$

где

$$\tilde{z} = z - 2\pi k \in G_{k-1}.$$

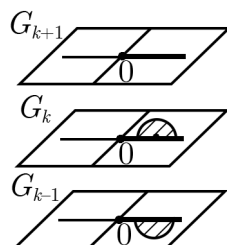


Рис. 12.6.

Многообразие — это множество, в котором любая точка имеет окрестность, гомеоморфная (имеет взаимнооднозначное непрерывное отображение) куску плоскости, т.е. простейшее обобщение понятия поверхности. В нашем случае G_k — многообразие. Заметим, что h регулярна на G (видно из теоремы 12.1).

Пример 12.2 (Поверхность Римана для $\sqrt[n]{z}$). Строим аналогично, но число листов конечно (их n , так как корень конечнозначен). При этом после оборота на последнем листе осуществляется переход на первый, т.е. нижний берег разреза на G_n отождествляется с верхним берегом на G_1 .

Возникает проблема, заключающаяся в том, что нижний берег разреза на G_n и верхний берег разреза на G_1 находятся в разных полуплоскостях. Данная проблема решается путём выхода в \mathbb{R}^4 .



Рис. 12.7. а) — бутылка Клейна, б) — лист Мёбиуса, в) — тор, г) — цилиндр

12.2. НЛО

Склеиваем углы квадрата. В случае склеивания верхнего с верхним, а нижнего с нижним, образуется цилиндр, оказывающийся в \mathbb{R}^3 .

Если склеивать вершины по диагонали, то получается лист Мёбиуса, помещающийся в \mathbb{R}^3 . К слову, лист Мёбиуса — неориентируемая поверхность.

Если склеить две стороны так, чтобы получился цилиндр, а две другие — крест накрест, то получается тор.

Если склеить две стороны так, чтобы получился цилиндр, а две другие — без сохранения ориентации, то получается бутылка Клейна, которая является поверхностью в \mathbb{R}^4 .

Таким образом, выход в большую размерность — стандартный прием построения многообразий.

12.3. Особые точки аналитических функций

Определение 12.3 (Особая точка аналитической функции). Пусть \mathcal{F} — аналитическая функция, пусть найдётся элемент $(B_r(a), f_a)$ и кривая $\Gamma_{a,b}$ такие, что элемент $(B_r(a), f_a)$ можно аналитически продолжить вдоль $\Gamma_{a,z} \forall z \in \Gamma \setminus \{b\}$, но его нельзя аналитически продолжить в точку b вдоль всей $\Gamma_{a,b}$. Тогда b — **особая точка аналитической функции \mathcal{F}** ($b \in \mathbb{C}$).

Если для функции $\mathcal{F}\left(\frac{1}{\xi}\right)$ точка $z_0 = 0$ является особой, то мы говорим, что для \mathcal{F} особой точкой будет точка ∞ .

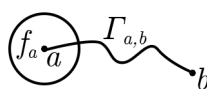


Рис. 12.8.

Замечание 12.2 (Связь между особыми точками обычных функций и аналитических функций). Если $b \in \overline{\mathbb{C}}$ — полюс или существенно особая точка обычной однозначной функции f , то b является особой в смысле определения 12.3.

Если $b \in \overline{\mathbb{C}}$ — устранимая особая точка, то она не является особой в смысле определения 12.3, например в случае $\frac{\sin z}{z}$. функцию можно продолжить с помощью ряда для любой точки в окрестности 0.

Пример 12.3. $\sqrt[n]{z}$ — многозначная функция, рассмотрим функцию

$$\frac{1}{g(z) - e^{i\pi/3}},$$

где g — регулярная ветвь $\sqrt[n]{z}$ в $B_1(-1)$. Стартовый элемент — $(B_1(1), g_1)$, где $g_1(1) = 1$. При продолжении $(B_1(1), g_1)$ вдоль γ_1 (верхняя единичная полуокружность) точка будет особой, т. к. невозможно продолжить в точку (-1) . При продолжении вдоль γ_2 (нижняя единичная полуокружность) данной проблемы не возникает.

Можно рассматривать данную ситуацию как три листа поверхности Римана, на одном из листов которой есть прокол, а на двух других — нет.

Теорема 12.3 (Коши-Адамара). Пусть есть

$$s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_R(a),$$

где $R < +\infty$ — радиус сходимости этого ряда. Тогда на границе круга сходимости (окружность $|z - a| = R$) есть хотя бы одна особая точка в смысле определения 12.3.

□ Доказательство от противного.

Допустим, особых точек на окружности $\{|z - a| = R\}$ нет. Тогда элемент $(B_R(a), s)$ можно по любому радиусу $[a, \xi]$ аналитически продолжить в граничную точку

$$\xi \in \{|z - a| = R\}.$$

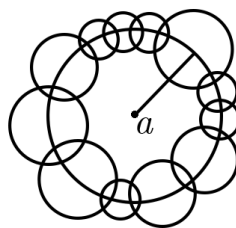


Рис. 12.9.

Тогда получились элементы $(B_{r_\xi}(\xi), f_\xi)$. Так как круги образуют открытое покрытие компакта $\{|z - a| = R\}$, то можно выбрать конечное число элементов $(B_{r_j}(\xi_j), f_j)_{j=1, \dots, k}$ так, что

$$\{|z - a| = R\} \subset \bigcup_{j=1}^k B_{r_j}(\xi_j).$$

Рассмотрим область

$$G = (B_R(a)) \cup \left(\bigcup_{j=1}^k B_{r_j}(\xi_j) \right)$$

и рассмотрим в G аналитическую функцию \mathcal{F} как совокупность элементов $(B_R(a), s)$ и $(B_{r_j}(\xi_j), f_j)_{j=1, \dots, k}$. Покажем, что на множестве G функция \mathcal{F} однозначна. Если взять $\ell, m \in \{1, \dots, k\}$ такие, что

$$B_{r_\ell}(\xi_\ell) \cap B_{r_m}(\xi_m) \neq \emptyset,$$

то тогда не будет пустым тройное пересечение этих кругов с исходным:

$$\emptyset \neq B_{r_\ell}(\xi_\ell) \cap B_{r_m}(\xi_m) \cap B_R(a).$$

Т. к. элементы $(B_{r_\ell}(\xi_\ell), f_\ell)$ и $(B_{r_m}(\xi_m), f_m)$ являются аналитическими продолжениями исходного элемента $(B_R(a), S)$, то

$$f_\ell(z) = s(z) = f_m(z) \quad \forall z \in \text{тройного пересечения},$$

т. е. $f_\ell(z) = f_m(z)$ — совпали на части области

$$B_{r_\ell}(\xi_\ell) \cap B_{r_m}(\xi_m).$$

Следовательно, по теореме единственности они совпадают на всем пересечении

$$f_\ell(z) = f_m(z) \text{ на } B_{r_\ell}(\xi_\ell) \cap B_{r_m}(\xi_m).$$

Тогда \mathcal{F} однозначна на G . Заметим, что

$$\exists \varepsilon > 0 : B_{R+\varepsilon}(a) \subset G,$$

то есть \mathcal{F} регулярна в $B_{R+\varepsilon}(a)$, т. к.

$$\mathcal{F}(z) = s(z) \quad \forall z \in B_R(a).$$

Следовательно,

$$\frac{\mathcal{F}^{(m)}(a)}{m!} = \frac{s^{(m)}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда как регулярная функция

$$\mathcal{F} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{F}^{(m)}(a)}{m!} (z-a)^m$$

в $B_{R+\varepsilon}(a)$, по доказанному выше

$$\frac{\mathcal{F}^{(n)}(a)}{n!} = c_n.$$

Следовательно, ряд

$$\sum c_n (z-a)^n$$

сходится в более широком круге $B_{R+\varepsilon}(a)$, значит R не является радиусом сходимости. ■

Определение 12.4 (Точка ветвления). Точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ является **точкой ветвления** аналитической функции \mathcal{F} , если

$$\exists r_0 > 0 : \forall r \in (0, r_0]$$

\mathcal{F} задана в сколь угодно малой окрестности $B_r(a)$ точки a , но не является в ней однозначной, то есть найдётся элемент

$$\mathcal{F} : (B_\delta(a_1), f_1) B_\delta(a_1) \subset B_r(a)$$

и этот элемент продолжается вдоль всех кривых, лежащих в круге с центром a и радиусом r , но может давать разные элементы при продолжении по разным кривым.

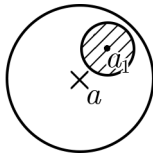


Рис. 12.10.

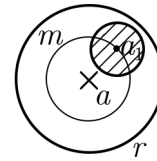


Рис. 12.11.

Определение 12.5 (Типы точек ветвления). Если $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — точка ветвления \mathcal{F} и если есть элемент

$$(B_\delta(a_1), f_1) : B_\delta(a_1) \subset B_r(a),$$

то если найдётся минимальное $m \in \mathbb{N} : m \geq 2$ такое, что после m -кратного аналитического продолжения по окружности с центром a получаем эквивалентный элемент, то a — **точка ветвления алгебраического порядка m** . Иначе a — **точка ветвления логарифмического порядка**.

Пример 12.4. $0, \infty$ — точки ветвления алгебраического порядка n для $\sqrt[n]{z}$.

Пример 12.5. $0, \infty$ — точки ветвлений логарифмического порядка для $\operatorname{Ln} z$.