ЛЕКЦИЯ 15

Дробно-линейные функции и их свойства

15.1. Дробно-линейные функции

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{где } a,b,c,d \in \mathbb{C}, \quad ad-bc \neq 0,$$

т. е. дробь не сокращается.

Доопределим по непрерывности:

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) \equiv \infty, \quad f(\infty) \equiv \frac{a}{c},$$

т. е. f отображает $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$.

В каких областях f осуществляет конформное отображение?

Заметим, что если $c = 0$, то при $d \neq 0$

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = Az + b$$

— линейное отображение плоскости. Для него все нижеследующие свойства верны (ясно из курса линейной алгебры). Далее (для простоты) считаем, что $c \neq 0$.

Теорема 15.1 (Конформность дробно-линейных функций)**.** *Пусть f — дробно-линейная функция. Тогда f конформно отображает $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$.*

☐ Для доказательства используем определение конформности в области, в обычных точках и в особых точках.

1) Докажем взаимную однозначность f в $\overline{\mathbb{C}}$.

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Выражаем z через w:

$$w \cdot cz + wd = az + b, \qquad z(cw-a) = b - wd, \qquad z = \frac{b-wd}{cw-a}.$$

Тогда z — дробно-линейная функция, обратная к f, причём

$$f^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty, \qquad f^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c},$$

т. е. f^{-1} задана на всем $\overline{\mathbb{C}}$.

Замечаем, что

$$(-d)(-a) - bc \neq 0,$$

т. е. дробь не сокращается. Таким образом, f взаимно однозначно отображает $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$, причём f^{-1} — дробно-линейная.

2) Проверяем конформность во всех точках из $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть $z_0 \neq \infty, -\frac{d}{c}$. Тогда

$$f'(z_0) = \left(\frac{az_0+b}{cz_0+d}\right)' = \frac{a(cz_0+d)-c(az_0+b)}{(cz_0+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz_0+d)^2} \neq 0,$$

т. к. $ad - bc \neq 0$.
Пусть $z_0 = -\frac{d}{c}$ — полюс 1 порядка. По определению конформности в полюсе первого порядка из предыдущей лекции надо рассмотреть функцию $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ и посчитать её производную в этой точке. Рассмотрим

$$g'(z) = \left(\frac{cz+d}{az+b}\right)' = \frac{c(az+b)-a(cz+d)}{(az+b)^2} = \frac{b\cdot c - ad}{(az+b)^2},$$

$$g'\left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{bc-ad}{\left(-\dfrac{ad}{c}+b\right)^2} = \frac{bc-ad}{(bc-ad)^2}c^2 = \frac{c^2}{bc-ad} \neq 0.$$

Т. к. $c \neq 0$, то g конформна в точке $-\frac{d}{c}$. Тогда по определению из предыдущей лекции f конформна в $-\frac{d}{c}$.
Пусть $z_0 = \infty$ — устранимая особая точка f. Тогда по определению из предыдущей лекции надо рассмотреть функцию $h(\xi) = f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$ и проверить её конформность в точке $\xi_0 = 0$:

$$h(\xi) = \frac{a\cdot\frac{1}{\xi}+b}{c\cdot\frac{1}{\xi}+d} = \frac{a+b\xi}{c+d\xi},$$

$$h'(\xi) = \frac{b(d\xi+c)-d(b\xi+a)}{(d\xi+c)^2} = \frac{bc-ad}{(d\xi+c)^2},$$

$$h'(0) = \frac{bc-ad}{c^2} \neq 0,$$

т. к. $bc - ad \neq 0$, $c \neq 0$.

■

Теорема 15.2 (Круговое свойство дробно-линейных отображений)**.** *Дробно-линейная функция f прямую или окружность Γ переводит в прямую или окружность $f(\Gamma)$.*

□ Для доказательства используется то, что это свойство верно для функции $\frac{1}{z}$.
Пусть функция

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{где } ad-bc \neq 0.$$

После приведения дроби к правильному виду $f(z)$ имеет вид:

$$w = f(z) = A + \frac{B}{z+C}, \quad \text{где } A, B, C \in \mathbb{C}.$$

Видно, что f является суперпозицией таких функций:

1) Параллельный перенос плоскости на вектор C:

$$z_2 = f_1(z) = z + C, \quad \text{где } C \in \mathbb{C}.$$

2)
$$z_3 = f_2(z_2) = \frac{1}{z_2}.$$

3)
$$z_4 = f_3(z_3) = B \cdot z_3 = |B| \cdot \mathrm{e}^{i \arg_{\text{гл}} B} \cdot z.$$

Это поворот вокруг нуля на угол $\arg_{\text{гл}} B$ и растяжение (сжатие) с центром 0 и коэффициентом $|B|$.

4) параллельный перенос на A:
$$w = f_4(z_4) = z_4 + A.$$

Т. е. $w = f(z) = f_4(f_3(f_2(f_1(z))))$. Ясно, что f_1, f_3, f_4 — линейные, т. е. не нарушают круговое свойство.

Рассмотрим отображение $w = f(z) = \frac{1}{z}$. Докажем, что для него верно круговое свойство. Выписываем уравнение:
$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}, \quad A^2 + B^2 + C^2 + D^2 > 0,$$
но $A = 0$ не исключается. Это уравнение или окружности, или прямой, или точки, или пустого множества. Производим замену
$$\begin{cases} z = x + iy, \\ \overline{z} = x - iy. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{z+\overline{z}}{2}, \\ y = \frac{z-\overline{z}}{2i}. \end{cases}$$

Подставляя в уравнение, получаем
$$A(z \cdot \overline{z}) + F \cdot z + \overline{F} \cdot \overline{z} + D = 0 \quad \text{где } F, \overline{F} \in \mathbb{C},$$
$$F = \frac{B}{2} + \frac{iC}{2}, \qquad \overline{F} = \frac{B}{2} - i\frac{C}{2}.$$
Рассматриваем отображение $w = \frac{1}{z}$. Тогда $\frac{1}{\overline{z}} = \overline{w}$. При отображении получим
$$A \cdot \left(\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\overline{w}}\right) + F \cdot \frac{1}{w} + \overline{F}\frac{1}{\overline{w}} + D = 0.$$

Итого:
$$A + F\overline{w} + \overline{F}w + D \cdot w \cdot \overline{w} = 0.$$

Получилось уравнение того же типа, т. е. или окружности, или прямой, или точки, или пустого множества.

Т. к. по теореме 15.1 f — взаимно-однозначное отображение, то при отображении прямой или окружности не может получиться точка или пустое множество. ■

Замечание 15.1. Возможны все четыре случая (переход прямой в прямую или окружность, переход окружности в прямую или окружность).

Пример 15.1.
$$w = f(z) = \frac{1}{z}.$$

Окружность $|z-1|=1$ переходит в прямую, т. к.

$$2 \to \frac{1}{2}, \qquad 0 \to \infty, \qquad 1+i \to \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}.$$

Можно заметить, что при отображении $\frac{1}{z}$ действительные числа переходят в действительные. В исходной окружности угол между касательной к окружности в точке 2 и прямой $\mathbb{R}$ есть $\frac{\pi}{2}$, т. к. конформные отображения сохраняют углы, то угол между прямой и осью x в точке 2 должен сохраниться, поэтому вместо точки $1+i$ можно было использовать значение угла.

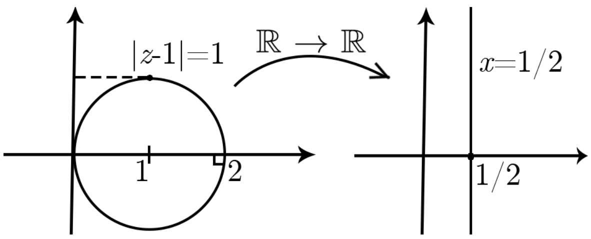

Рис. 15.1.

Пример 15.2. Окружность $|z-2|=1$ переходит в окружность:

$$1 \to 1, \qquad 3 \to \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

поэтому в обоих рассмотренных образах угол с действительной осью должен быть $\frac{\pi}{2}$. Фигура, соответствующая этому условию — окружность с центром в точке $\frac{2}{3}$ и радиусом $\frac{1}{3}$: $|z-\frac{2}{3}|=\frac{1}{3}$.

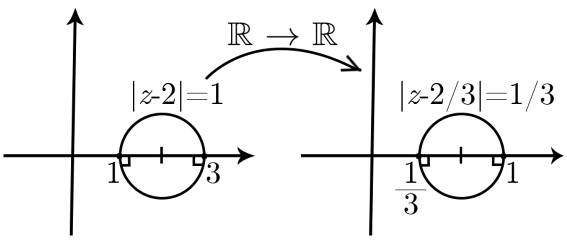

Рис. 15.2.

Пример 15.3 (С прямыми)**.** Рассмотрим прямую $x=-\frac{1}{2}$. Точка $-\frac{1}{2} \to -2$, $\infty \to 0$ — получается линия, проходящая через эти точки. Так как угол в первой точке с осью $\mathbb{R}$ был $\frac{\pi}{2}$, то и в образе этой точки, точке -2, угол будет так же прямым. Этому условию соответствует окружность $|z+1|=1$.

Пример 15.4 (С прямыми)**.** Рассмотрим прямую $y=x$. Считаем точки:

$$0 \to \infty, \qquad \infty \to 0, \qquad 1+i \to \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}.$$

Образ прямой — прямая.

Таким образом, все 4 случая возможны.

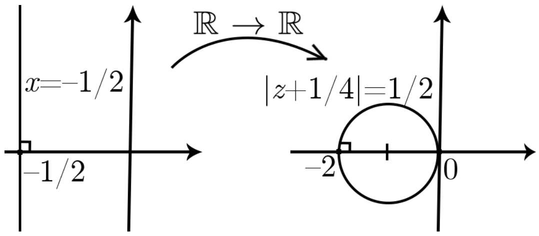

Рис. 15.3.

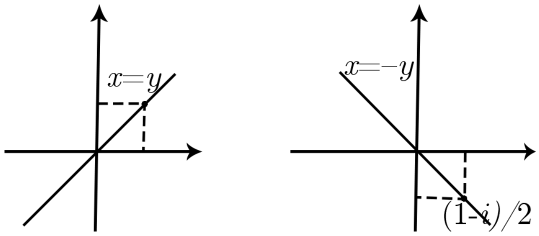

Рис. 15.4.

Замечание 15.2 (Критерий перехода в прямую). Прямая или окружность Γ при отображении

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

перейдет в прямую, а не в окружность $\Leftrightarrow -\frac{d}{c} \in \Gamma$ (прямая от окружности отличается тем, что прямая пройдёт через ∞, а окружность — нет).

Определение 15.1 (Симметричность точек относительно окружности)**.** Пусть Γ — окружность вида $\{|z - z_0| = R\}$, где $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Точки z, z^* **симметричны относительно** Γ, если выполнено:

1)
$$\arg_{\text{гл}}(z - z_0) = \arg_{\text{гл}}(z^* - z_0),$$
т. е. точки z, z^* лежат на одном луче, выходящем из центра.

2)
$$|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2.$$

Считаем, что точки z_0 и ∞ — симметричны друг к другу относительно Γ.

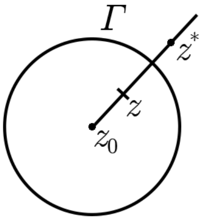

Рис. 15.5.

Теорема 15.3 (Сохранение симметрии при дробно-линейном отображении)**.** *Пусть точки z, z^* симметричны относительно прямой или окружности* Γ*, тогда если f — дробно-линейное отображение, то $w = f(z)$, $w^* = f(z^*)$ — симметричны относительно $f(\Gamma)$.*

Лемма 15.1 (Критерий симметричности точек относительно окружности)**.** *Пусть Γ — прямая или окружность. Тогда верен следующий критерий: точки z, z^* — симметричны относительно $\Gamma \Leftrightarrow \forall\tilde{\Gamma}$ — прямая или окружность, проходящая через z, z^* будет обладать свойством: $\tilde{\Gamma} \perp \Gamma$.*

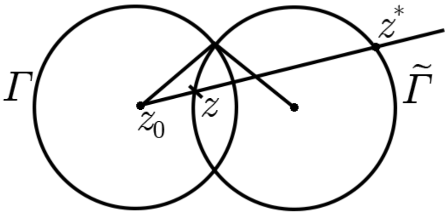

Рис. 15.6.

$\square$ Для доказательства используется теорема о касательной и секущей из школьной геометрии.

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть Γ — прямая, z, z^* симметричны относительно Γ. Если $\tilde{\Gamma}$ — прямая, то очевидно:

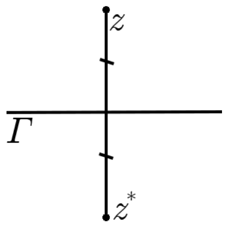

Рис. 15.7.

Если $\tilde{\Gamma}$ — окружность, то её центр z_0 должен лежать на Γ. Далее очевидно:

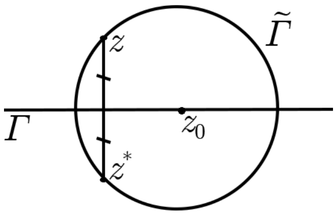

Рис. 15.8.

Пусть Γ — окружность. Если $\tilde{\Gamma}$ — прямая, то z, z^* должны лежать на ней, и она проходит через центр окружности z_0, а потому она ей ортогональна.

Пусть Γ — окружность, $\tilde{\Gamma}$ — окружность. Если из точки z_0 провести к $\tilde{\Gamma}$ (ξ — точка касания), то согласно теореме о касательной и секущей, если из одной точки вне окружности к окружности проведены касательная и секущая, то тогда квадрат длины отрезка касательной равен произведению короткой секущей на длинную, т. е. в нашем случае

$$|\xi - z_0|^2 = |z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2,$$

т. к. z, z^* по условию симметричны относительно Γ, т. е.

$$|\xi - z_0| = R \quad \Rightarrow \quad \xi \in \Gamma.$$

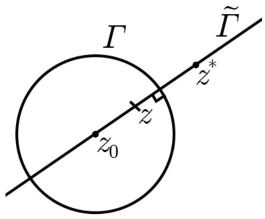

Рис. 15.9.

Тогда касательная к Γ через ξ будет перпендикулярна радиусу $[z_0, \xi]$. Поэтому касательные в точке ξ к Γ и $\tilde{\Gamma}$ перпендикулярны, а следовательно $\Gamma \perp \tilde{\Gamma}$ в точке ξ.

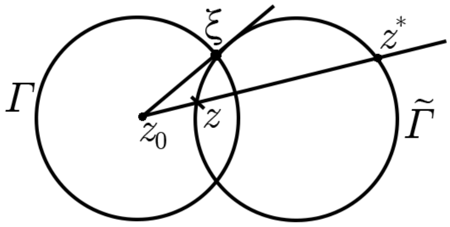

Рис. 15.10.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть Γ — прямая, и любая $\tilde{\Gamma}$ — окружность или прямая, проходящая через z, z^*, перпендикулярна Γ. Если взять прямую $\tilde{\Gamma}$, то z, z^* лежат на перпендикуляре к Γ.

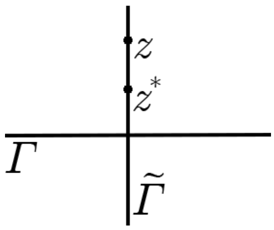

Рис. 15.11.

Если $\tilde{\Gamma}$ — окружность, то, т. к. она перпендикулярна Γ, центр $\tilde{\Gamma}$ — точка $z_0 \in \Gamma$, т. е.

$$|z - z_0| = |z^* - z_0|.$$

С учётом предыдущего получаем, что z, z^* симметричны относительно Γ.

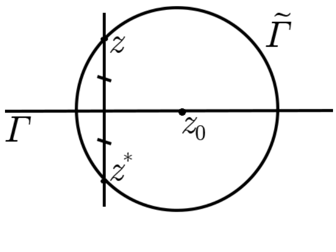

Рис. 15.12.

Пусть Γ — окружность. Если $\tilde{\Gamma}$ — прямая, то $\tilde{\Gamma}$ проходит через z_0 (центр Γ).

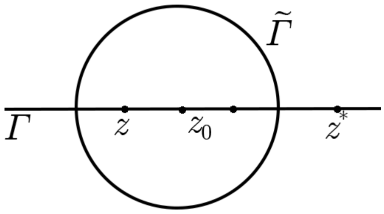

Рис. 15.13.

Пусть $\tilde{\Gamma}$ — окружность. Тогда из центра окружности проводим касательную и секущую к $\tilde{\Gamma}$. Если z, z^* лежат по разные стороны от z_0, то невозможно из z_0 провести касательную к $\tilde{\Gamma}$ (потому что z_0 лежит внутри $\tilde{\Gamma}$). Таким образом, z^* и z лежат по одну сторону от z_0. Т. к. $\Gamma \perp \tilde{\Gamma}$, то касательная из z_0 к $\tilde{\Gamma}$ касается $\tilde{\Gamma}$ в точке $\xi \in \Gamma$.

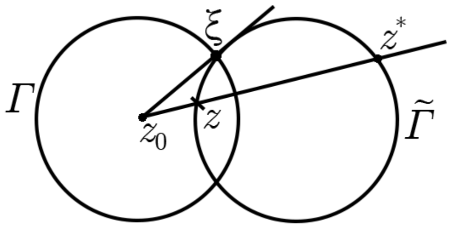

Рис. 15.14.

Тогда $|\xi - z_0| = R$, но по теореме о касательной и секущей из курса средней школы известно, что

$$|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = |\xi - z_0|^2 = R^2$$

Тогда z, z^* симметричны относительно Γ. ■

□ Доказательство теоремы 15.3 (дважды используется лемма 15.1).

Пусть $w = f(z)$, $w^* = f(z^*)$, z, z^* — симметричны относительно прямой или окружности Γ. Т. к. Γ — прямая или окружность, то по теореме 15.2 $f(\Gamma)$ — прямая или окружность.

Рассмотрим произвольную $\tilde{\Gamma}_2$ — прямую или окружность такую, что $w, w^* \in \tilde{\Gamma}_2$. Рассматриваем

$$f^{-1}(\tilde{\Gamma}_2) = \Gamma_2.$$

Т. к. по теореме 15.1 f^{-1} — дробно-линейная функция, то по теореме 15.2 Γ_2 — прямая или окружность, проходящая через точки z, z^* (т. к. $w, w^* \in \tilde{\Gamma}_2$). Т. к. z, z^* — симметричны относительно Γ, то $\Gamma_2 \perp \Gamma$ по лемме 15.1. Т. к. f конформна в $\mathbb{C}$ и, следовательно, сохраняет углы между кривыми, то

$$f(\Gamma) \perp f(\Gamma_2) = \tilde{\Gamma}_2.$$

Т. е. для произвольно выбранной $\tilde{\Gamma}_2$ — прямой или окружности, проходящей через w, w^* доказали, что $\tilde{\Gamma}_2 \perp f(\Gamma)$. Тогда по лемме 15.1 точки w, w^* симметричны относительно $f(\Gamma)$. ■

Пример 15.5. Найти все дробно-линейные отображения верхней полуплоскости на единичный круг.

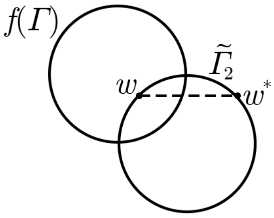

Рис. 15.15.

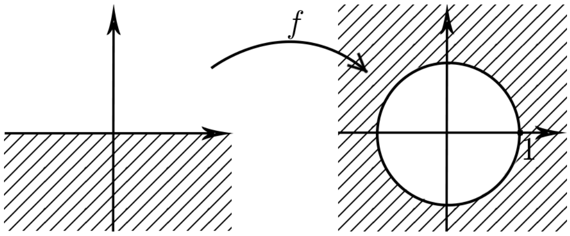

Рис. 15.16.

Ищется функция вида $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Необходимо найти 3 комплексных параметра.

Пусть для f точка $z_0 \in \{\operatorname{Im} z > 0\}$ переходит в 0 (в центр круга). Тогда $f(z) = \frac{z-z_0}{?}$. Согласно теореме 15.3 точки, симметричные относительно Γ, переходят в точки, симметричные относительно $f(\Gamma)$. Это, например, точки z_0 и $\overline{z}_0$. Т. к. f взаимно-однозначно отображает всё $\overline{\mathbb{C}}$, то тогда $\mathbb{R} \to |w| = 1$. Т. к. z_0, $\overline{z}_0$ симметричны относительно $\mathbb{R}$, то по теореме 15.3 если $f(z_0) = 0$, то

$$f(\overline{z}_0) = \infty \quad \Rightarrow \quad f(z) = A \cdot \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}.$$

Пользуемся условием, что $\mathbb{R} \to |w| = 1$, получая, в частности: $|f(1)| = 1$ (т. е. лежит на окружности $|w| = 1$)

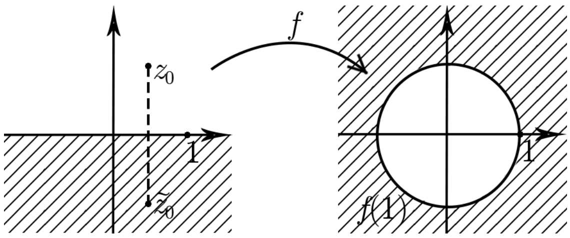

Рис. 15.17.

Считаем:

$$1 = |f(1)| = |A| \cdot \frac{|1 - z_0|}{|1 - \overline{z}_0|} = |A| \quad \Rightarrow \quad A = \mathrm{e}^{i\alpha} \quad \forall \alpha \in [0, 2\pi),$$

т. к. точки z_0 и $\overline{z}_0$ равноудалены от оси $\mathbb{R}$. Тогда

$$f(z) = \mathrm{e}^{i\alpha} \cdot \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}.$$

Этих условий достаточно, поскольку из этой формулы следует: $f(z_0) = 0$, $f(\overline{z}_0) = \infty$. Следовательно, ось $\mathbb{R}$, относительно которой симметричны z_0 и $\overline{z}_0$, переходит в линию

$\{|w| = R > 0\}$, относительно которой симметричны точки 0 и ∞. Но из $|f(1)| = 1$ следует, что $R = 1$. Таким образом

$$\mathbb{R} \to \{|w| = 1\} \quad \Rightarrow \quad f(\{\operatorname{Im} z > 0\}) = \begin{cases} |w| < 1, \\ |w| > 1, \end{cases}$$

т. к. область переходит в область. Т. к. $f(z_0) = 0$, то образ равен $\{|w| < 1\}$.

Пример 15.6. Найти все дробно-линейные отображения единичного круга на единичный круг ($\{|z| < 1\} \to \{|w| < 1\}$).

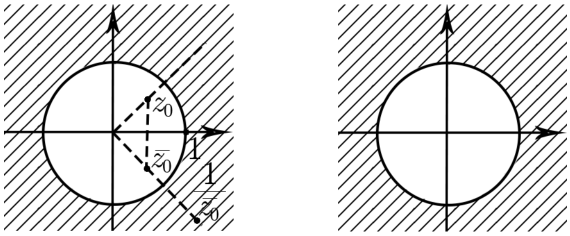

Рис. 15.18.

Пусть $z_0 : |z| < 1$, $f(z_0) = 0$. Тогда симметричная ей точка $\frac{1}{\overline{z}_0}$ относительно единичной окружности перейдёт в бесконечность

$$\frac{1}{\overline{z}_0} = \frac{z_0}{\overline{z}_0 \cdot z_0} = \frac{z_0}{|z_0|^2}, \qquad |z_0| \cdot \left|\frac{z_0}{|z_0|^2}\right| = 1.$$

Т. е. $f(\frac{1}{\overline{z}_0}) = \infty$. Таким образом,

$$f(z) = A \cdot \frac{z - z_0}{z - \frac{1}{\overline{z}_0}} = \tilde{A}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 \cdot z}.$$

Считаем $f(1)$. Т. к. $\{|z| = 1\} \to \{|w| = 1\}$, то $|f(1)| = 1$. Таким образом

$$1 = |f(1)| = |\tilde{A}| \cdot \frac{|1 - z_0|}{|1 - \overline{z}_0|} = |\tilde{A}| \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} = \mathrm{e}^{i\alpha} \quad \forall \alpha \in [0, 2\pi),$$

т. е.

$$f(z) = \mathrm{e}^{i\alpha} \cdot \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 \cdot z}, \quad \text{где } \alpha \in [0, 2\pi), \quad |z_0| < 1.$$

Аналогично примеру 15.5 можно показать, что этих условий достаточно.