ЛЕКЦИЯ 13

Целые и мероморфные функции. Принцип аргумента. Теорема Руше.

Определение 13.1. Если функция $f \in C^1(\mathbb{C})$, то f — целая функция.

Теорема 13.1 (Вид целых функций степенного роста)**.** *Пусть f — целая функция, причем:*

$$\exists R > 0,\, \exists M > 0,\, \exists n \in \mathbb{Z} : |f(z)| \leqslant M|z|^n, \quad \forall z : |z| > R.$$

Тогда f — алгебраический многочлен степени не выше n.

☐ При доказательстве будет использоваться формула для коэффициентов ряда Тейлора.

Т. к. $f \in C^1(\mathbb{C})$, то

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m z^m, \quad \text{где} \quad c_m = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi^{m+1}} d\xi, \quad \forall \rho > 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\rho > R$. Тогда получим:

$$|c_m| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi^{m+1}} d\xi \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\rho^+} \frac{|f(\xi)|}{|\xi|^{m+1}} d\xi \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\rho^+} \frac{M|\xi|^n}{|\xi|^{m+1}} |d\xi| =$$

$$\frac{M}{2\pi} \rho^{n-m-1} \cdot 2\pi\rho = M\rho^{n-m},$$

где $|\xi| = \rho$ для $\xi \in \Gamma_\rho$.

Если $m > n$, то $M\rho^{n-m} \to 0$ при $\rho \to 0$. Т. е. $c_m = 0$ для $m > n + 1$. Значит,

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n.$$

■

Следствие 13.1 (Теорема Лиувиля)**.** *Пусть f — целая функция. Пусть*

$$\exists M > 0 : |f(z)| \leqslant M, \quad \forall z \in \mathbb{Z}.$$

Тогда $f \equiv \text{const}$.

Заметим, что если f — целая функция, то точка ∞ — изолированная особая точка. Рассмотрим все три возможных случая.

1) Пусть точка ∞ — устранимая особая точка. Тогда $\exists \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = c$, $c \in \mathbb{C}$. Значит f ограничена в некоторой окрестности точки ∞, т. е.

$$\exists R > 0,\, \exists M > 0 : |f(z)| \leqslant M, \quad \forall z : |z| > R.$$

На компакте $\overline{B_R(0)}$ непрерывная функция f является ограниченной, т. е.

$$\exists M_2 > 0 : |f(z)| \leqslant M_2 \quad \forall z \in \overline{B_R(0)}.$$

Следовательно $|f|$ ограничена на всем множестве $\mathbb{C}$. Значит по теореме Лиувиля $f \equiv \text{const}$.

2) Пусть точка ∞ — полюс порядка n для функции f. Тогда

$$f(z) = (c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z) + \sum_{n=0}^{-\infty} c_n z^n,$$

где $c_n \neq 0$ в некоторой окрестности точки ∞.
Обозначим

$$g(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z.$$

Рассмотрим функцию $h(z) = f(z) - g(z)$. Функция $g(z)$ — целая. Т. к. $f(z)$ — целая по условию, то $h(z)$ тоже целая. Но $h(z) = \sum\limits_{n=0}^{-\infty} c_n z^n$ в окрестности точки ∞. Следовательно для функции $h(z)$ точка ∞ является устранимой. Значит по первому случаю $h \equiv \mathrm{const}$ и $f(z)$ — алгебраический многочлен степени n.

$$f(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0.$$

3) Пусть точка ∞ — существенно особая точка функции f. Возможны различные случаи ($\mathrm{e}^z, \sin z, \cos z, \dots$).

Определение 13.2. Функция f — мероморфная, если $f \in C^1(\mathbb{C} \backslash B)$, где $\forall b \in B, b$ — полюс функции f.

Заметим, что у мероморфной функции не более чем счетное число полюсов в $\mathbb{C}$ (т. к. для каждого полюса b есть окрестность в $\mathbb{C}$, в которой других полюсов нет). Причем $\forall R > 0$ в круге $B_R(0)$ только конечное число полюсов (т. к. иначе появляется предельная точка полюсов в $\overline{B_R(0)}$).

Замечание 13.1. Точка ∞ для мероморфной функции является или устранимой, или полюсом, или существенно особой точкой, или предельной точкой полюсов.

Теорема 13.2 (О разложении мероморфной функции в сумму дробей)**.** *Пусть точка ∞ для мероморфной функции f является устранимой особой точкой или полюсом. Тогда $f(z)$ — рациональная дробь.*

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}.$$

□ При доказательстве будет использоваться разложение функции в ряд Лорана в окрестности каждого полюса f.

Т. к. точка ∞ не является предельной точкой полюсов, то у функции f в $\mathbb{C}$ только конечное число полюсов $a_1, a_2, \dots, a_k$. Пусть в окрестности точек $a_l, l = 1 \dots k$

$$f(z) = \underbrace{\frac{c^l_{n_l}}{(z-a_l)^{n_l}} + \dots + \frac{c^l_{-1}}{z-a_l}}_{g_l(z)} + \sum_{m=0}^{+\infty} c^l_m (z-a_l)^m.$$

Разложение функции f в ряд Лорана в окрестности точки ∞ представим в виде:

$$f(z) = \underbrace{c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z}_{g(z)} + \sum_{m=0}^{-\infty} c_m z^m.$$

Не исключено, что $g \equiv$, если ∞ — устранимая точка.

Рассмотрим функцию

$$h(z) = f(z) - \sum_{l=1}^{k} g_l(z) - g(z).$$

Тогда $h(z)$ имеет в точках $a_1, a_2, \dots a_k, \infty$ устранимые особенности. Если $h(z)$ доопределить по непрерывности в точках $a_1, a_2, \dots a_k$ до $\tilde{h}$, то $\tilde{h}$ будет целая функция, причем для нее точка ∞ — устранимая. Следовательно $h(z) \equiv \text{const}$.

$$f(z) = c + g(z) + \sum_{l=1}^{k} g_l(z).$$

■

13.1. Принцип аргумента. Теорема Руше.

Теорема 13.3 (Вычисление $N-P$ через интеграл)**.** *Пусть G — односвязная область в $\mathbb{C}$, Γ — простой замкнутый кусочно-гладкий контур в G. Пусть $f \in C^1(G \backslash \{a_1, a_2, \dots, a_k\})$, где $a_1, a_2, \dots, a_k$ — полюса функции f, причем $a_1, a_2, \dots, a_k$ внутри Γ.*

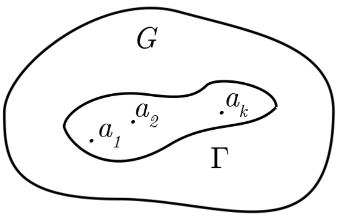

Рис. 13.1.

Кроме того, пусть $f^{(z)} \neq 0, \forall z \in \Gamma$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(N - P),$$

где $N = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ — число нулей функции f внутри Γ, считая с их порядками. $P = p_1 + p_2 + \dots + p_k$ — число полюсов функции f внутри Γ, считая с их порядками.

□ При доказательстве будет использоваться теорема Коши о вычетах для $\dfrac{f'}{f}$.

Заметим, что из условия следует, что внутри Γ у функции f конечное число нулей $b_1, b_2 \dots, b_m$. Если нулей функции f внутри Γ бесконечно много, то у них будет предельная точка - тоже нуль функции. Если предельная точка на Γ, то нарушается условие $f \neq 0$ на Γ. Если предельная точка лежит внутри Γ, то по теореме единственности $f \equiv 0$ внутри Γ. Следовательно $f = 0$ на Γ.

Тогда получим, что у функции $\dfrac{f'}{f}$ внутри Γ особыми точками могут быть только полюса $a_1, a_2, \dots a_k$ и нули функции $b_1, b_2 \dots, b_m$.

Если b_l — нуль функции f порядка $n_l \in \mathbb{N}$, то

$$f(z) = (z - b_l)^{n_l} g_l(z),$$

где $g_l(z)$ — регулярна в некоторой окрестности b_l и $g_l(b_l) \neq 0$. Тогда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_l(z-b_l)^{n_l-1}g_l(z) + (z-b_l)^{n_l}g_l'(z)}{(z-b_l)^{n_l}g_l(z)} = \frac{n_l}{z-b_l} + \frac{g_l'(z)}{g_l(z)}.$$

Т. к. $\dfrac{g_l'(z)}{g_l(z)}$ — регулярная функция в некоторой окрестности b_l, то

$$\frac{g_l'(z)}{g_l(z)} = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p^l (z-b_l)_1^p$$

в некоторой окрестности b_l. Следовательно главная часть ряда для $\dfrac{f'}{f}$ в окрестности b_l содержит только $\dfrac{n_l}{z-b_l}$. Таким образом, $\operatorname{res} \dfrac{f'}{f} = n_l$.

Если a_l — полюс функции f порядка p_l, то

$$f(z) = (z - a_l)^{-p_l} h_l(z),$$

где $h_l(z)$ — регулярна в некоторой окрестности a_l и $h_l(a_l) \neq 0$. Считая также как и для b_l получим, что главная часть ряда Лорана для $\dfrac{f'}{f}$ в окрестности точек a_l равна $\dfrac{-p_l}{z-a_l}$. Следовательно $\operatorname{res} \dfrac{f'}{f} = -p_l$.

По теореме Коши о вычетах для $\dfrac{f'}{f}$ и для области ограниченной кривой Γ получим:

$$\int\limits_{\Gamma^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left(\sum_{l=1}^{m} \operatorname*{res}_{b_l} \frac{f'}{f} + \sum_{l}^{k} \operatorname*{res}_{a_l} \frac{f'}{f} \right) = 2\pi i \left((n_1 + n_2 + \dots + n_m) + (p_1 + p_2 + \dots + p_k) \right).$$

■

Следствие 13.2 (Принцип аргумента)**.** *При выполнении условий теоремы 3:*

$$\frac{1}{2\pi} (\Delta_\Gamma \arg f) = N - P,$$

где N, P — такие же, как и в теореме 3.

□ При доказательстве будет использована формула для нахождения $\Delta_\Gamma \arg f$. Из предыдущих лекций:

$$\Delta_\Gamma \arg f = \operatorname{Im} \left(\int\limits_{\Gamma^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right) = (\text{по теореме 3}) = \operatorname{Im}(2\pi i (N - P)) = 2\pi (N - P),$$

т. к. $N - P \in \mathbb{Z}$.

■

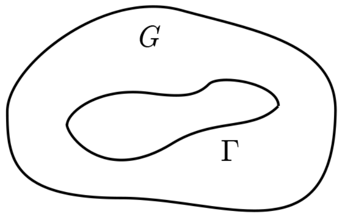

Рис. 13.2.

Теорема 13.4 (Теорема Руше). *Пусть G — односвязная область, Γ — простой замкнутый кусочно-гладкий контур в G. Пусть $f, g \in C^1(G)$, причем* $|f(z)| > |g(z)|, \forall z \in \Gamma$.

Тогда число нулей функции f внутри Γ (считая вместе с их порядками) равно числу нулей функции $f + g$ внутри Γ (считая вместе с их порядками).

□ При доказательстве будет использоваться принцип аргумента.

Пусть N_f — число нулей функции f внутри Γ (считая вместе с их порядками), N_{f+g} — число нулей функции $f + g$ внутри Γ (считая вместе с их порядками). Чтобы использовать теорему 3 проверим, что $f \neq 0$ и $f + g \neq 0$ на Γ.

По условию:

$$|f(z)| > |g(z)| \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad |f(z)| > 0 \forall z \in \Gamma,$$

т. е. $f(z) \neq 0$ на Γ.

$$|f(z) + g(z)| > ||f(z)| - |g(z)|| \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad |f(z) + g(z)| > 0 \forall z \in \Gamma,$$

т. е. $(f(z) + g(z)) \neq 0$ на Γ.

По принципу аргумента:

$$N_{f+g} = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg(f(z) + g(z)) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f + \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) = N_f + \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right).$$

Т. к. $p = 0$, то полюсов нет.

Пусть

$$\Delta_\Gamma \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) = \Delta_{\varphi(\Gamma)} \arg w,$$

где $w = \varphi(z)$, $\varphi(z) = 1 + \dfrac{g(z)}{f(z)}$.

Т. к. по условию $\left|\dfrac{g}{f}\right| < 1$ на Γ, то $\varphi(\Gamma) \subset B_1(1)$.

$$\Delta_{\varphi(\Gamma)} \arg w = \operatorname{Im} \int_{\varphi(\Gamma)} \frac{dw}{w} = 0,$$

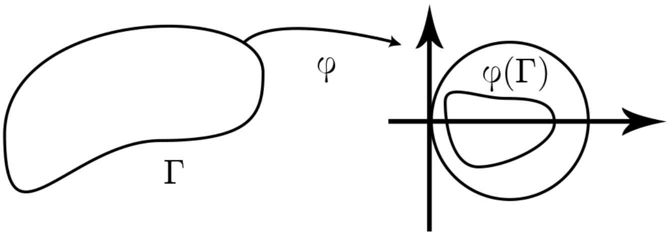

Рис. 13.3.

т. к. внутри $\varphi(\Gamma)$ нет точки ноль. Следовательно $N_{f+g} = N_f$, т. к.

$$\Delta_\Gamma \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0.$$

■

Пример 13.1.

$$P_3(z) = z^3 + 3z + 1.$$

Рассмотрим, сколько нулей имеет многочлен (считая с кратностью) в области $\{|z| < 1\}$.

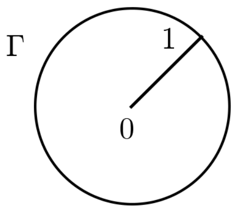

Рис. 13.4.

Пусть

$$f(z) = 3z, \quad g(z) = z^3 + 1.$$

Тогда для $|z| = 1$ получим:

$$|f(z)| = |3z| = 3, \quad |g(z)| = |z^3 + 1| \leqslant |z^3| + 1 = 2, \quad |f| > |g|.$$

Следовательно функция $P_3(z) = f(z) + g(z)$ имеет в области $\{|z| < 1\}$ столько же корней, сколько и $f(z)$, т. е. один корень.

Теорема 13.5 (Основная теорема алгебры)**.** *Пусть* $P_n(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z_0 + c_0$, *где* $c_n, \ldots, c_1, c_0 \in \mathbb{C}$. *Тогда* P_n *имеет в* $\mathbb{C}$ *ровно* n *корней, считая с их кратностями.*

□ При доказательстве будет использоваться теорема Руше.

Пусть $f(z) = c_n z^n$, $g(z) = c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$.

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| \to 0, \quad \text{при} \quad |z| \to +\infty.$$

Следовательно

$$\exists R_0 : \forall R \geqslant R_0 \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1, \forall z : |z| = R.$$

По теореме Руше для $f, f+g$ в круге $B_R(0)$ функции

$$f(z) = c_n z^n, \quad P_n(z) = f(z) + g(z) = c_n z^n + \dots + c_1 z + c_0$$

имеют одинаковое число нулей, считая с их кратностями, т. е. n нулей. $f(z) = c_n z^n$ имеет один нуль $z_0 = 0$ кратности n. Т. к. многочлен $P_n(z)$ в каждом круге $B_R(0)$ при $R > R_0$ имеет ровно n корней (считая с кратностями), то P_n имеет ровно n корней в $\mathbb{C}$.

■

13.2. Принцип сохранения области

Теорема 13.6 (Принцип сохранения области)**.** *Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $f \in C^1(G)$, $f \not\equiv \text{const}$. Тогда $f(G)$ — область.*

Лемма 13.1 (Об открытости)**.** *Пусть функция f регулярна в точке z_0, причем*

$$f'(z_0) = 0, \quad f''(z_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

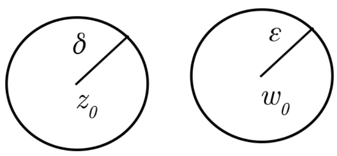

Рис. 13.5.

Тогда

$$\exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall w \in \mathring{B}_\varepsilon(w_0),$$

где $w_0 = f(z_0)$ существует ровно n различных прообразов при отображении f в $B_\delta(z_0)$.