ЛЕКЦИЯ 1

Комплексные числа

Ставится цель: расширить область действительных чисел, добавить туда новые, но так, чтобы на этом более широком множестве можно было построить анализ: вводить последовательности, функции, расматривать пределы, сходимости и т. д., чтобы это расширение было содержательным.

Проблема 1: необходимо, чтобы само множество чисел было содержательным. Напоминаю, что множество $\mathbb{R}$ действительных чисел является *полем*, то есть действительные числа можно складывать, умножать, делить, не выходя за рамки $\mathbb{R}$, а также для них выполняется ряд аксиом (можно переставлять слагаемые, раскрывать скобки и т. д.)

Чтобы решить эту проблему, добавим к множеству $\mathbb{R}$ ещё одно число, которое исторически называется i:

$$\{\mathbb{R}, i\}$$

Чтобы новое множество было полем, необходимо научиться новый элемент i складывать и умножать с числами из $\mathbb{R}$, то есть множество должно содержать числа вида $a + b \cdot i$, где a и b — действительные числа. Оказывается, этого достаточно.

Определение 1.1. ***Множество комплексных чисел*** $\mathbb{C}$ — это множество всех чисел вида $a + b \cdot i$, где a, b — действительные числа, а $i^2 = -1$:

$$\mathbb{C} = \{z = a + b \cdot i,\ a, b \in \mathbb{R}\}, \quad i^2 = -1.$$

Число

$$a = \operatorname{Re} z$$

называется ***действительной частью*** комплексного числа z, а

$$b = \operatorname{Im} z$$

— его ***мнимой частью***.

Проверим, является ли полученное множество полем.

Определение 1.2. Два числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ ***равны***, если равны их действительные и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \{a_1 = a_2,\ b_1 = b_2\}.$$

Число $z = a + ib$ называется ***нулём***, если его действительная и мнимая части равны нулю:

$$z = a + ib = 0 \Leftrightarrow \{a = 0,\ b = 0\}.$$

1.1. Арифметические действия с комплексными числами

Рассмотрим числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$.

1) *Сложение*: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$ — отдельно складываются действительные и мнимые части, при этом результат сложения тоже является комплексным числом, то есть числом вида $a + ib$.

2) *Умножение*: $z_1z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$, поскольку $i^2 = 1$. В результате мы снова получили комплексное число.

3) *Деление* $(z_2 \neq 0)$: $z_1/z_2 = z = x + iy$, где z должно удовлетворять уравнению

$$z_2 \cdot z = z_1 \,.$$

Здесь возникает вопрос, существует ли решение такого уравнения и будет ли оно единственным.

Перемножая, получим: $a_2x - b_2y + i(a_2y + b_2x) = a_1 + ib_1$. Это равносильно двум равенствам

$$a_2x - b_2y = a_1, \quad a_2y + b_2x = b_1.$$

Решение такой системы относительно (x, y) существует и единственно при условии

$$\det \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = a_2^2 + b_2^2 \neq 0\,,$$

которое автоматически выполняется, поскольку мы положили $z_2 \neq 0$.

Заметим, что расширить множество $\mathbb{R}$ так, чтобы более общее множество было полем, возможно только в двух случаях (теорема Фробениуса): если определяемое множество — множество комплексных чисел или кватернионов (чисел вида $a + ib_1 + jb_2 + kb_3$ с тремя мнимыми единицами).

Таким образом, мы доказали, что если $z_2 \neq 0$, то результат деления в $\mathbb{C}$ существует и ровно один. Но находить его, решая систему уравнений, неудобно. Конструктивный метод нахождения z_1/z_2 основан на ***комплексном сопряжении***.

Определение 1.3. Числом, ***комплексно сопряжённым*** к z_2, называется число

$$\bar{z}_2 = a_2 - ib_2\,.$$

Избавимся от комплексной единицы в знаменателе:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2^2 - (ib_2)^2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \cdot \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,.$$

Как уже было доказано, при делении мы не вышли за рамки $\mathbb{C}$.

Форма записи, которую мы до сих пор употребляли, $z = a + ib$, называется ***алгебраической формой*** комплексного числа.

Ремарка: зачем стоит изучать ТФКП? — В рамках $\mathbb{R}$ есть проблемы, которые удаётся решать в рамках $\mathbb{C}$. Расширение матанализа до комплексного позволяет получить сильные методы вычисления интегралов, рядов и т. д.

Сейчас мы рассмотрим тригонометрическую форму комплексного числа. Зачем она нужна? Ответ: для упрощения дальнейших выкладок. Когда мы проводим выкладки в алгебраической форме, особенно при рассмотрении умножения и деления, получаются громоздкие выражения. Если возвести число в степень, выражения станут ещё более громоздкими (биномы Ньютона). Есть более простой путь, который мы сейчас и рассмотрим.

1.2. Тригонометрическая форма комплексного числа

Установим взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$(a+ib) \iff (a,b) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\mathbb{C} \iff \mathbb{R}^2.$$

В $\mathbb{R}^2$ a и b — декартовы координаты точки z. Введём полярные координаты, которые будут давать тригонометрическую форму (рис. 1.1):

- $r = \sqrt{a^2+b^2}$ — радиальная координата — расстояние от точки до нуля;
- φ — полярный угол — угол, образованный радиус-вектором данной точки с положительным направлением оси Ox:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

Этот угол определён не однозначно, а с точностью до $2\pi k$, и определяется только для ненулевых точек ($z \neq 0$).

Тогда

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Подстановка даёт ***тригонометрическую форму*** записи комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

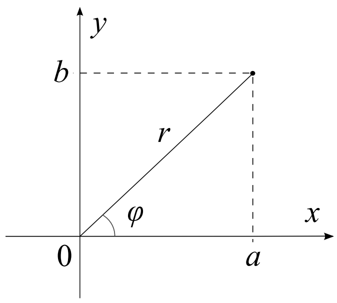

Рис. 1.1. Точка на комплексной плоскости

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_1(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то эти числа ***равны*** тогда и только тогда, когда у этих точек

$$\begin{cases} r_1 = r_2, \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Определение 1.4. ***Главный аргумент*** комплексного числа z — это полярный угол φ_0, лежащий в пределах от нуля до 2π:

$$\arg_{\text{гл}} z = \varphi_0 \in [0; 2\pi).$$

Все остальные полярные углы, соответствующие z, включая главный, обозначаются $\mathrm{Arg} z$:

$$\mathrm{Arg} z = \{\arg_{\text{гл}} z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

1.3. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме

Если дано два числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

1) при *умножении* имеем:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)) = \\ = r_1 r_2 \cdot (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Из этого следует формула для возведения в степень (*формула Муавра*):

$$z_1^n = r_1^n(\cos n\varphi_1 + i\sin n\varphi_1).$$

2) *Деление*:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}\cdot\frac{\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_2\cos\varphi_1)}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2},$$

и окончательно получаем

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

3) *Извлечение корня*: $\sqrt[n]{z}$, $z\in\mathbb{C}$ — это число $w\in\mathbb{C}$ такое, что $w^n=z$.

Пусть дано $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, ищем $w=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$. Для этого подставляем z и w в равенство $w^n=z$ и используем для w формулу Муавра:

$$\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Из условия равенства двух комплексных чисел:

$$\begin{cases}\rho^n &= r\,,\\ n\psi &= \varphi+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}\,,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\rho &= \sqrt[n]{r}\,,\\ \psi &= \frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n},\quad k\in\mathbb{Z}\,.\end{cases}$$

Таким образом, корней n-ой степени будет несколько, то есть множество:

$$\{\sqrt[n]{z}\}=\{w_k\}=\left\{\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)\right),\right.$$

$$\left.k=0,1,\ldots,n-1\right\}.$$

Начиная с $k=n$, числа w_k будут повторяться, и новых ответов мы не получим.

Подчеркнём, что при использовании тригонометрической записи подразумевается, что $z\neq 0$.

Если изобразить корни n-ой степени на комплексной плоскости, то все они будут лежать на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ в вершинах правильного n-угольника, вписанного в эту окружность (рис. 1.2).

Запись $\sqrt[n]{r}$ означает одно число — арифметический корень из действительного положительного числа, а $\{\sqrt[n]{z}\}$ — множество корней. Чтобы их различать, ставят фигурную скобку.

Рекомендуется использовать в выкладках другое обозначение — ***формулу Эйлера***:

$$\forall\varphi\in\mathbb{R}\quad \cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$$

Пока что $e^{i\varphi}$ — просто обозначение, мы не определяем экспоненту в $\mathbb{C}$, но такая запись очень удобна:

$$z_1=r_1\cdot e^{i\varphi_1},\quad z_2=r_2\cdot e^{i\varphi_2},$$

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Последнее — не следствие того, что показатели экспоненты при умножении складываются, а следствие обозначения и соответствующей формулы для тригонометрической записи.

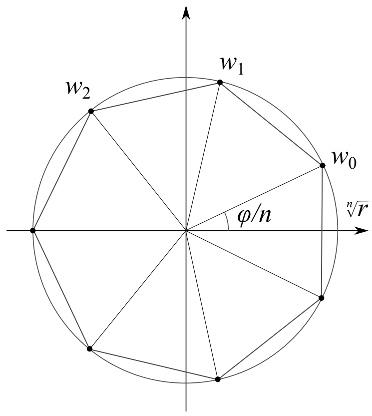

Рис. 1.2. Корни n-ой степени

Деление:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

возведение в степень:

$$z_1^n = r_1^n \cdot e^{in\varphi},$$

извлечение корня:

$$\left\{ \sqrt[n]{z_1} \right\} = \left\{ \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\varphi_1/n + 2\pi k/n)} \right\}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

НЛО (небольшое лирическое отступление)

◀ Оказывается (доказанный факт), что в $\mathbb{C}$ нельзя ввести отношение порядка между числами, то есть нельзя сказать, какое из них больше, а какое меньше. Причина — невозможность удовлетворить *аксиоме непрерывности*:

$$A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset, \quad B \subset \mathbb{R},\ B \neq \emptyset.$$

$$A \leqslant B \iff \{\forall a \in A,\ \forall b \in B \quad a \leqslant b\}.$$

Аксиома непрерывности. Если $A \leqslant B$, то $\exists c \in \mathbb{R} : \quad A \leqslant c \leqslant B$, то есть $\forall a \in A,\ \forall b \in B \quad a \leqslant c \leqslant b$. ▶

1.4. Последовательности комплексных чисел

Определение 1.5. Если число $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, то ***открытая окрестность*** радиуса r с центром в z_0 — это множество точек открытого круга:

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : \quad |z - z_0| < r\}.$$

Замкнутая окрестность

$$\overline{B_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : \quad |z - z_0| \leqslant r\}.$$

Проколотая окрестность

$$\dot{B}_r(z_0) = B_r(z_0) \backslash \{z_0\}.$$

Окрестность бесконечности

$$B_r(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : \quad |z| > 1/r\}.$$

В $\mathbb{C}$, в отличие от $\mathbb{R}$, нет $\pm\infty$, поскольку нет отношения порядка, а есть *одна бесконечно удалённая точка* ∞.

Определение 1.6.

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

(с введённой выше системой окрестностей точки ∞).

Множество $\overline{\mathbb{C}}$ не является полем, потому что с точкой ∞ нельзя совершать арифметические операции. Почему последнее определение естественное?

НЛО: Сфера Римана

◀ Геометрическая модель построения $\overline{\mathbb{C}}$: возьмём плоскость $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}^2$) и сферу произвольного радиуса, которая касается плоскости в точке 0. Выберем на ней точку N, диаметрально противоположную точке 0, и построим отображение сферы на плоскость: из точки N проведём лучи, которые пересекают сферу. Эти лучи пересекут и плоскость. Получим отображение точек M сферы в точки $f(M)$ на плоскости (рис. 1.3).

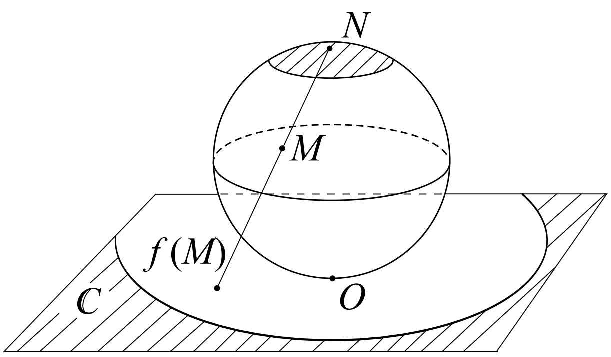

Рис. 1.3. Сфера Римана и построение стереографической проекции

Такое отображение называется ***стереографическая проекция*** сферы на плоскость. Сфера называется *сферой Римана*. Можно доказать, что отображение непрерывно. Но: сама точка N никуда не отобразилась.

Говорят, что N *отобразилась в бесконечно удалённую точку*. Действительно, если рассмотреть окрестность точки N на сфере (часть сферы, отсекаемая плоскостью, параллельной $\mathbb{C}$), то она отобразится в $B_r(\infty)$.

Таким образом, считается, что сфера Римана с точкой N включительно отображается в $\overline{\mathbb{C}}$. ▶

Определение 1.7. Пусть $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ — последовательность комплексных чисел. Говорят, что $z \in \mathbb{C}$ — её ***предел***, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad |z_n - z| < \varepsilon.$$

Определение 1.8. Последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ ***сходится к бесконечности***

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \infty \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad |z_n| > 1/\varepsilon.$$

Утверждение 1.1. Пусть есть последовательность комплексных чисел $\{z_n = x_n + iy_n\} \subset \mathbb{C}$ и число $z = x + iy \subset \mathbb{C}$. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z \;\Leftrightarrow\; \left\{\lim_{n\to+\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = y\right\}.$$

У каждой теоремы есть идея, ядро. Идея данной теоремы (утверждения): свести сходимость в $\mathbb{C}$ к сходимости в $\mathbb{R}$.

Доказательство. □ *Используем школьные геометрические неравенства.*

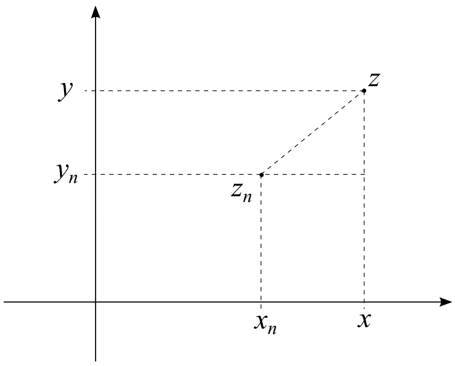

Рис. 1.4. К доказательству утверждения о сходимости.

$\Rightarrow$ $z_n \to z$ при $n \to +\infty \Leftrightarrow |z_n - z| \to 0,\ n \to +\infty$: рассмотрим неравенство

$$0 \leqslant |x_n - x| \leqslant |z_n - z|$$

— катет прямоугольного треугольника не больше гипотенузы; но $|z_n - z| \to 0$, и по теореме о трёх последовательностях ("о двух милиционерах") $\exists \lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$. Аналогично, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} |y_n - y| = 0$.

$\Leftarrow$ Так как при $n \to +\infty$ $x_n \to x$, $y_n \to y$, то $|x_n - x| \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$, $|y_n - y| \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$. Рассмотрим неравенство

$$0 \leqslant |z_n - z| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y|$$

— гипотенуза не больше суммы катетов. $|x_n - x| \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$, $|y_n - y| \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$, следовательно,

$$\exists \lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} z.$$

Утверждение доказано. ■

Замечание 1.1.[1] В $\mathbb{C}$ для последовательностей сохраняются теоремы из $\mathbb{R}$ про предел суммы, произведения, частного сходящихся последовательностей и критерий Коши сходимости последовательности.

Замечание 1.2. $z_n \to z$ при $n \to +\infty \quad \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - z| = 0$.

[1] Замечание — это теорема, которая даётся без доказательства: либо она очень простая, либо очень сложная.

1.5. Ряды комплексных чисел

$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$ — ?
$\{z_n\}$ — последовательность комплексных чисел.
Рассматривается $s_N = z_1 + z_2 + \dots + z_N$, $N \in \mathbb{N}$ — ***частичная сумма ряда***.

Определение 1.9. Считается, что ***ряд сходится*** к комплексному числу z,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z \in \mathbb{C},$$

тогда и только тогда, когда

$$\lim_{N\to+\infty} s_N = z.$$

Замечание 1.3. Если есть последовательность комплексных чисел

$$\{z_n = x_n + iy_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$$

и число $z = x + iy \in \mathbb{C}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z \;\Leftrightarrow\; \left\{\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x,\ \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y\right\}.$$

Это следует из опр. 1.9 и утв. 1.1.

Замечание 1.4. Для рядов в $\mathbb{C}$ сохраняется теорема о сумме сходящихся рядов и критерий Коши сходимости ряда.

1.6. Функции комплексного переменного

Пусть $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \emptyset$, пусть есть отображение

$$f:\ G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

$$\text{т. е.}\quad \forall z \in G \quad z \mapsto w = f(z)$$

Тогда f — ***функция комплексного переменного***.

Определение 1.10. Пусть $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \emptyset$, тогда точка z_0 — ***предельная точка*** G, если

$$\forall \delta > 0 \quad \dot{B}_\delta(z_0) \cap G \neq \emptyset.$$

Определение 1.11. Пусть $f:\ G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, точка z_0 — предельная точка для G, тогда

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A \in \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in G \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

$$(\text{т.е. } z \in \dot{B}_\delta(z_0) \cap G) \qquad |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Точка $A \in \mathbb{C}$ называется ***пределом функции*** f.

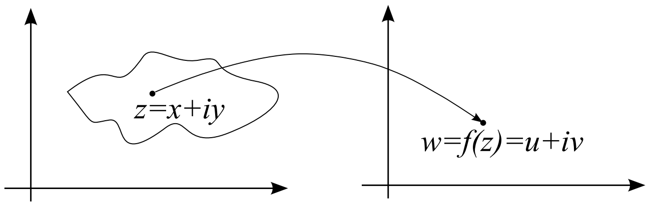

Рис. 1.5. Действительная и мнимая части функции

Для $\forall f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ можно выделить *действительную и мнимую часть* этой функции.

Действительная часть: $u = \operatorname{Re} f$, *мнимая* часть: $v = \operatorname{Im} f$:

$$u : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$v : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad z = x + iy.$$

Замечание 1.5. Пусть функция$f = u + iv : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ — предельная точка G. Тогда

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A = a + bi \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = a, \ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = b \right\}.$$

(доказывается аналогично утв. 1.1).

Определение 1.12. Пусть $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, точка $z_0 \in G$, z_0 — предельная точка для G. Тогда f ***непрерывна в точке*** z_0 (обозначение: $f \in C(z_0)$) тогда и только тогда, когда

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Определение 1.13. Если функция $f \in C(z_0)$, $\forall z_0 \in G$, то говорят, что f ***непрерывна на множестве*** G и обозначают $f \in C(G)$.

1.7. Функцональные ряды

Рассмотрим $f_n : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, и функцию $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Определение 1.14. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ ***сходится*** к $f(z)$ ***поточечно*** на G,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \to f(z),$$

если сходятся соответствующие числовые ряды:

$$\forall z_0 \in G \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0) = f(z_0).$$

Определение 1.15. Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ ***сходится равномерно*** к $f(z)$ на множестве G,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \rightrightarrows f(z),$$

если последовательности частичных сумм равномерно сходятся к этой функции:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N, \quad \forall z \in G \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z) \right| < \varepsilon.$$

Замечание 1.6. (Признак Вейерштрасса) Пусть

$$f_n : \ G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

$$|f_n(z)| \leqslant a_n$$

— оценивается по модулю сходящимся числовым рядом, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, причём ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда функцональный ряд сходится равномерно на G,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows \ .$$

Замечание 1.7. (Наследование непрерывности) Если

$$f_n : \ G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

$$f : \ G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

и $f_n \in C(G)$, причём $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ на G, то $f \in C(G)$.

1.8. Дифференцирование функций комплексного переменного

Определение 1.16. Пусть множество $G \in \mathbb{C}$, $G \neq \emptyset$. Точка z_0 называется его ***внутренней точкой*** ($z_0 \in \operatorname{int} G$), если

$$\exists \delta > 0 : \quad B_\delta(z_0) \subset G.$$

Определение 1.17. Пусть $f : \ G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, пусть $z_0 \in \operatorname{int} G$, тогда ***производная в точке*** z_0

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Теорема 1.1. (Условие Коши–Римана) Пусть функция $f : \ G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, пусть $z_0 = x_0 + iy_0 \in \operatorname{int} G$. Тогда

$$\exists f'(z_0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u \in D(x_0, y_0) - \ \text{дифференцируемая в точке } (x_0, y_0), \\ v \in D(x_0, y_0), \\ u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0), \\ u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0), \end{cases}$$

причём если $\exists f'(z_0)$, то

$$f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0).$$

На следующих лекциях будет показано, что если функция во всех точках имеет первую производную, то она имеет и вторую, третью и т. д. производные и раскладывается в аналитический ряд.

Практическая работа №1. Вычислить:

1) $\dfrac{(1+i)^6}{(\sqrt{3}-i)^5}$;

2) $\left\{\sqrt[6]{-1}\right\}$;

3) $\left\{\sqrt[2013]{2013}\right\}$.