Консультация к устному государственному экзамену по математике
Раздел: теория функций комплексного переменного

Конспект консультации Карлова М.И.

Доказывать в билетах на устном государственном экзамене нужно только то, что указано в программе. На оценку влияет оценка за письменный государственный экзамен, а также оценки по математике за предыдущие семестры. Причём если человек отвечает плохо, но имеет хорошую зачётку, то оценку постараются поставить хорошую, а если зачётка плохая, но ответы хорошие, то и оценку тоже постараются поставить хорошую.

33. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Интегральная теорема Коши.

В данном билете нужно доказать обе теоремы (и условия Коши-Римана, и интегральную теорему Коши).

Определение (дифференцирование):

Если $G \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \operatorname{int} G$ (т.е. $\exists \delta > 0 : B_\delta(z_0) \subset G$), если $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, то

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \tag{1}$$

Теорема 1 (условия Коши-Римана):

Пусть

$$z_0 = x_0 + iy_0 \in \operatorname{int} G, \quad G \subset \mathbb{C}. \tag{2}$$

Пусть функция:

$$f = u + iv : G \to \mathbb{C}. \tag{3}$$

Тогда:

$$\exists f'(z_0) \iff \begin{cases} u : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & u \in \mathcal{D}((x_0, y_0)) \\ v : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & u \in \mathcal{D}((x_0, y_0)) \\ u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) \\ u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0) \end{cases}, \tag{4}$$

причём если $\exists f'(z_0)$, то для неё справедлива формула:

$$f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0). \tag{5}$$

Для доказательства используется:

Замечание 1:

$$\exists f'(z_0) \text{ (в смысле определения 1) } \iff \Delta f = f'(z_0)\,\Delta z + \alpha(\Delta z), \tag{6}$$

где

$$\alpha : \tilde{G} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} = 0, \tag{7}$$

т.е. $\alpha(\Delta z)$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем Δz.

Возможные вопросы

1) Расмотреть функцию $f(z) = \overline{z}$. Найти точки, где $\exists f'(z)$.
Решение:

$$f(z) = x - iy, \text{ где } z = x + iy. \tag{8}$$

$$u(x,y) = x,\ u_x = 1,\ u_y = 0 \tag{9}$$

$$v(x,y) = -y,\ v_y = -1,\ v_x = 0 \tag{10}$$

Поскольку

$$1 = u_x \neq v_y = -1, \tag{11}$$

то дифференцируемости нет $\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C},\ \exists f'(z)$
2) Рассмотреть функцию $f(z) = z \cdot \operatorname{Im} z$, найти точки, где $\exists f'(z)$
Решение:

$$f(z) = (x + iy)\,y = xy + iy^2, \tag{12}$$

$$u = xy,\ u_x = y,\ u_y = 2y \tag{13}$$

$$v = y^2,\ v_y = 2y,\ v_x = 0 \tag{14}$$

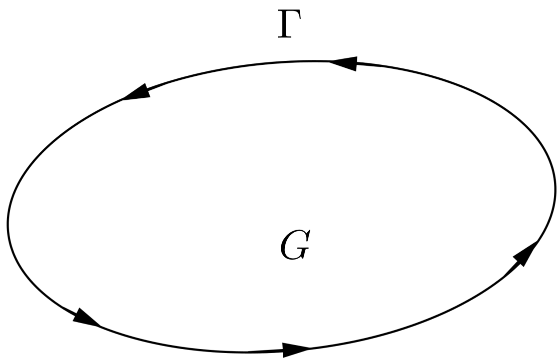
$$\begin{cases} y = 2y \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \tag{15}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\ \nexists f'(z), \tag{16}$$

$$f'(0) = u_x(0;0) + iv_x(0;0) = 0 \tag{17}$$

Теорема 2 (интегральная теорема Коши для односвязной области):

Пусть Γ - простая (не имеет самопересечений, кроме, возможно, совпадающих начала и конца) замкнутая кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{C}$ (жорданова кривая). Пусть G - область в $\mathbb{C}$, для которой $\delta G = \Gamma$, причём $\infty \notin G$.



Пусть функция

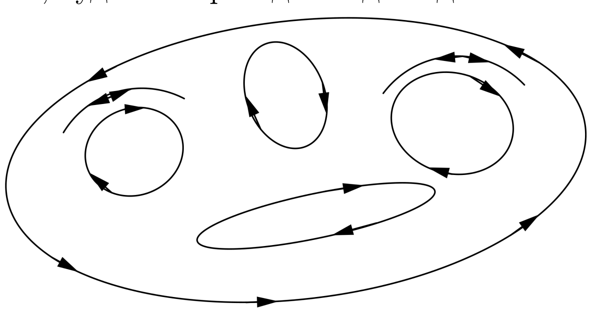
$$f: \overline{G} \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f \in C^1(G), \; f \in C\left(\overline{G}\right). \tag{18}$$

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma^+} f(z)\, dz = 0. \tag{19}$$

Определение (область с кусочно-гладкой границей):

Область $G \subset \mathbb{C}$ называется областью с кусочно-гладкой границей, если граница G состоит из конечного числа простых замкнутых кусочно-гладких кривых (не исключается, что область может быть неограниченной) и, возможно, конечного числа кусочно-гладких разрезов.
Контур ориентируется так, что при обходе по нему область остаётся слева (внешний контур (если он есть) - против часовой, внутренний - по часовой. Считается, что разрез ориентирован так, будто он проходится дважды - в обе стороны).



Теорема 3 (интегральная теорема Коши для неодносвязной области):

Пусть G - ограниченная (т.е. $\infty \notin G$) область в $\mathbb{C}$ с кусочно-гладкой границей, причём функция

$$f \in C^1(G), \; f \in C\left(\overline{G}\right). \tag{20}$$

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma^+} f(z)\, dz = 0. \tag{21}$$

Возможный вопрос:

Пусть

$$G = \{|z| < 1\}, \ f(z) = \tfrac{1}{z}, \tag{22}$$
$$\int\limits_{G^+} \tfrac{1}{z} dz = 2\pi i \tag{23}$$

Почему интеграл не равен нулю?
Ответ: потому что функция в нуле не является регулярной.

Возможный вопрос:

Рассмотрим область

$$\tilde{G} = \{|z| > 1\}, \ f(z) = \frac{1}{z} \in C^1\left(\tilde{G}\right), \tag{24}$$

и при этом

$$\int\limits_{\Gamma^-} z dz = -2\pi i. \tag{25}$$

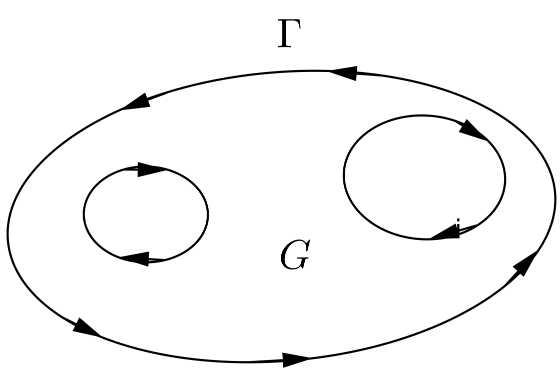
Ненулевой интеграл получается вследствие того, что область не ограничена.

34. Интегральная формула Коши, разложение функции, регулярной в окрестности точки, в ряд Тейлора

Теорема 1 (интегральная формула Коши):

Пусть G - ограниченная область в $\mathbb{C}$ с кусочно-гладкой границей. Пусть

$$f \in C^1(G), \ f \in C\left(\overline{G}\right). \tag{26}$$



Тогда

$$\forall z \in G \hookrightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\partial G)^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \tag{27}$$

Определение (степенной ряд):

Степенным рядом называется ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \left(z-a\right)^n, \quad a \in \mathbb{C},\ c_n \in \mathbb{C}. \tag{28}$$

Определение (радиус сходимости степенного ряда):

Степенные ряды имеют область сходимости - круг:

$$\begin{gathered} \exists! R \in [0; +\infty] : \\ 1) \forall z \in B_R(a) \text{ ряд (28) сходится} \qquad . \\ 2) \forall z \in \mathbb{C} \backslash B_R(a) \text{ ряд (28) расходится} \end{gathered} \tag{29}$$

Число R называется радиусом сходимости (числового ряда). Для него существует **формула Коши-Адамара:**

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{30}$$

На границе круга сходимости существует хотя бы одна точка, в которой степенной ряд расходится (см. теорема Коши-Адамара).

Теорема 2 (о разложении регулярной функции в степенной ряд):

Пусть функция $f \in C^1\left(B_R(a)\right)$, где $a \in \mathbb{C},\ R \in [0; +\infty]$. Тогда

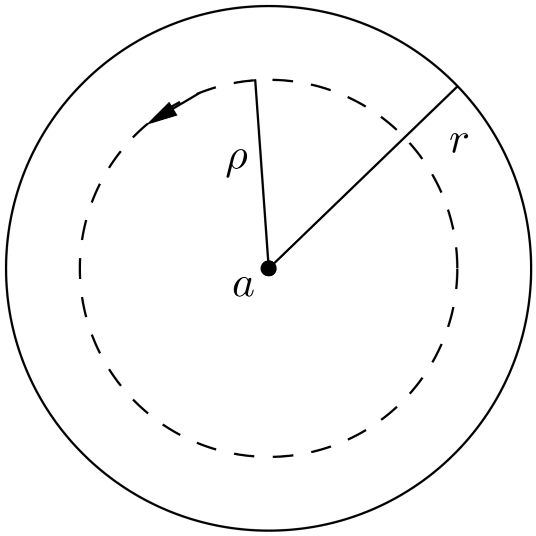
$$\forall z \in B_R(a) \hookrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \left(z-a\right)^n, \tag{31}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\left(\xi - z\right)^{n-1}} d\xi, \tag{32}$$

где

$$\Gamma_\rho = \left\{|z-a| = \rho\right\},\ \rho \in (0; r). \tag{33}$$



Замечание:

Если функция представима в круге степенным рядом:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad \forall z \in B_R(a), \tag{34}$$

то

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cdot n \cdot (z-a)^{n-1}. \tag{35}$$

Отсюда следует, что

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (z-a)^{n-2}. \tag{36}$$

И так далее для производных более высокого порядка. Если подставить $z = a$, то из формулы (34) следует, что

$$f(a) = c_0,\ f'(a) = c_1,\ \ldots\ , f^{(n)}(a) = c_n \cdot n! \tag{37}$$

Отсюда следует, что степенной ряд имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n. \tag{38}$$

Формулы Тейлора для основных фунций:

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad R = +\infty \tag{39}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad R = +\infty \tag{40}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \qquad R = +\infty \tag{41}$$

$$\tan z = \sum_{n=0}^{+\infty} ? \qquad R = +\infty \tag{42}$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad R = +\infty \tag{43}$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} C_\alpha^n z^n, \qquad R = 1 \tag{44}$$

$$\text{где } C_k^n = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}, \tag{45}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \qquad R = 1 \tag{46}$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n \qquad R = 1 \tag{47}$$

35. Разложение функции, регулярной в кольце, в ряд Лорана. Изолированные особые точки однозначного характера.

Определение (ряд Лорана):

Рядом Лорана называется ряд вида:

$$(*) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n = (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}). \tag{48}$$

Считается, что ряд Лорана (*) сходится, когда оба ряда (I) и (II) сходятся. Ряд (I) сходится в $B_R(a)$, где

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{49}$$

Заменой $\xi = \frac{1}{z-a}$ ряд (II) сводится к степенному ряду:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} \xi^k, \tag{50}$$

который сходится при

$$|\xi| < r_1, \quad \text{где } r_1 = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{c_{-k}}}. \tag{51}$$

Отсюда следует, что:

$$\left|\frac{1}{z-a}\right| < r_1, \Rightarrow |z-a| > \frac{1}{r_1}.$$

Таким образом, ряд (I) сходится в круге с центром a и радиусом R, а ряд (II) сходится во внешности круга с центром a и радиусом $r = \frac{1}{r_1}$ (r - внутренний радиус сходимости). Если $r < R$, то ряд Лорана (*) сходится в кольце

$$V_{r,R}(a) = \{z : \; r < |z - a| < R\}. \tag{52}$$

Теорема 1 (о разложении в ряд Лорана функции, регулярной в кольце):

Пусть функция f регулярна в кольце:

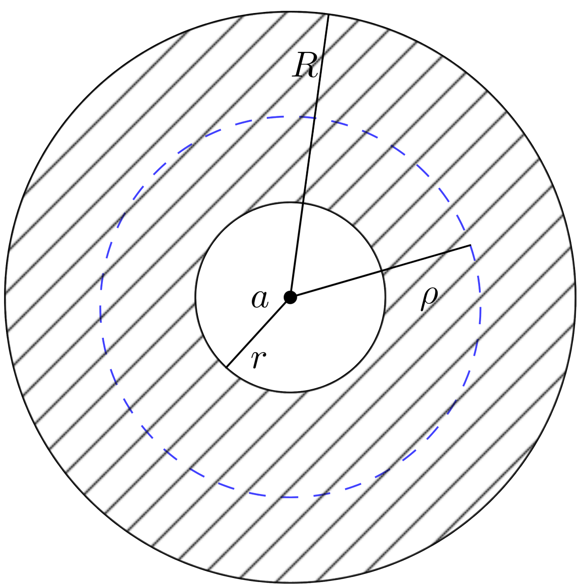
$$f \in C^1(V_{r,R}(a)), \quad a \in \mathbb{C}, \; 0 \le r < R \le +\infty. \tag{53}$$

Тогда функция раскладывается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \tag{54}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n-1}} d\xi. \tag{55}$$



Замечание:

Если функция раскладывается в кольце в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad \forall z \in V_{r,R}(a), \tag{56}$$

то она регулярна в этом кольце:

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n n (z-a)^n. \tag{57}$$

Замечание 2:

Если функция $f \in C^1 \left(V_{r,R}\left(a\right)\right)$ (регулярна в кольце), то она раскладывается в ряд Лорана единственным образом в данном кольце.

Возможный вопрос:

Разложить в ряд Лорана в кольце с центром $z = 0$ функцию $f\left(z\right) = \frac{1}{z}$.

Решение:

Это и есть ряд Лорана, поскольку $f \in C^1 \left(\mathbb{C} \setminus \{0\}\right)$. В таком кольце функция раскладывается в ряд Лорана единственным образом, и потому другого нет.

Возможный вопрос №2:

Дана функция

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n. \tag{58}$$

Вынесем z :

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}}. \tag{59}$$

При этом данные разложения не противоречат замечанию о единственности разложения в ряд Лорана, поскольку эти разложения для разных колец. Первое разложение справедливо при $|z| < 1$, а второе - $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \Rightarrow |z| > 1$.

Изолированные особые точки

Определение (изолированная особая точка):

Точка $a \in \mathbb{C}$ - изолированная особая точка для функции f, если $f \notin C^1\left(a\right)$ и при этом

$$\exists \delta > 0: \ f \in C^1 \left(\dot{B}_\delta\left(a\right)\right). \tag{60}$$

Точка ∞ - изолированная особая точка для функции f, если

$$\exists \delta > 0: \ f \in C^1 \left(|z| > \frac{1}{\delta}\right). \tag{61}$$

Из определения изолированной особой точки и того, что $\dot{B}_\delta\left(a\right)$ - кольцо, то

$$f\left(z\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(z-a\right)^n, \qquad \forall z \in \dot{B}_\delta\left(a\right). \tag{62}$$

Рассмотрим конечную изолированную особую точку $a \in \mathbb{C}$:

Условие	Тип	Ряд Лорана (критерий)
$\exists \lim\limits_{z\to a} f(z) = A$	Устранимая особая точка	Ряд Тейлора: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$ $\forall z \in \dot{B}_R(a)$
$\exists \lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$	Полюс порядка N	$f(z) = \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \sum\limits_{n=-N+1}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ $\forall z \in \dot{B}_\delta(a),\ c_{-N} \neq 0, \forall n > N \hookrightarrow c_{-n} = 0$
$\nexists \lim\limits_{z\to a} f(z)$	Существенно особая точка	Ряд Лорана для f в $\dot{B}_\delta(a)$ содержит бесконечно много рациональных дробей

Рассмотрим $a = \infty$:

Условие	Тип	Ряд Лорана (критерий)
$\exists \lim\limits_{z\to \infty} f(z) = A$	Устранимая особая точка	$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{-\infty} c_n (z-a)^n,$ $\forall z : \|z\| > \frac{1}{\delta}$
$\exists \lim\limits_{z\to \infty} f(z) = \infty$	Полюс порядка N	$f(z) = c_N z^N + \ldots + c_1 z + \sum\limits_{n=0}^{-\infty} c_n (z-a)^n$ $\forall z : \|z\| > \frac{1}{\delta},\ c_N \neq 0, \forall n > N \hookrightarrow c_n = 0.$
$\nexists \lim\limits_{z\to \infty} f(z)$	Существенно особая точка	Ряд Лорана для f в $\left\{z : \|z\| > \frac{1}{\delta}\right\}$ содержит бесконечно много положительных степеней

Определение (правильная и главная части ряда Лорана):

Пусть $a \in \mathbb{C}$. Тогда при разложении в ряд Лорана функции в окрестности этой точки часть, соответствующая положительным степеням, называется правильной, а часть, где дроби - главной частью.
Если же функция раскладывается в ряд Лорана в окрестности бесконечности, то часть, соответствующая отрицательным степеням (вида $\sum\limits_{n=0}^{-\infty} c_n z^n$), называется правильной, а главной частью - оставшаяся часть.
Заметим, что тип особой точки определяется видом главной части ряда Лорана.

Определение (порядок полюса):

$a \in \mathbb{C}$ - полюс порядка $N \in \mathbb{N}$ для $f \iff$

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^N}, \quad \text{где } h \in C^1(B_\delta(a)),\ h(a) \neq 0, \tag{63}$$

и N - максимально возможная степень, для которой выполнено данное выражение.
∞ - полюс порядка $N \in \mathbb{N}$ для $f \iff$

$$f(z) = z^N \cdot g(z), \quad \text{где } g(z) \in C^1\left(\left\{z : |z| > \frac{1}{\delta}\right\}\right), \quad \lim_{z\to\infty} g(z) = A \neq 0. \tag{64}$$

Определение (нуль порядка n):

Функция y имеет нуль порядка n в точке a, если она регулярна в этой точке и

$$0 = y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(n-1)} \neq y^{(n)} \neq 0. \tag{65}$$

В этом случае ряд Тейлора имеет вид:

$$g(z) = (z-a)^n \cdot \tilde{g}(z), \tag{66}$$

где $\tilde{g}$ регулярна в точке a и не равна нулю в этой точке.

Если функция является дробью: $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, причём $g(z)$ имеет нуль порядка m в точке a, $h(z)$ имеет нуль порядка n в точке a. Если $n > m$, то точка a - полюс f порядка $(n-m)$. Если $n \leq m$, то точка a - устранимая.

Возможный вопрос:

Рассмотрим в точке $z = 0$ функцию:

$$f(z) = \frac{(1-\cos z)^{10}}{(\sin z)^{2014}}. \tag{67}$$

Рассмотрим $g(z) = 1 - \cos z$. Её производная есть $g'(z) = \sin z$, а вторая производная: $g''(z) = \cos z$. Заметим, что

$$g(0) = g'(0) = 0 \neq g''(0). \tag{68}$$

Это можно было бы понять и по форме ряда Тейлора:

$$1 - \cos z = 1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots\right) = \frac{z^2}{2} - \ldots. \tag{69}$$

Поэтому $g(z)$ можно представить как:

$$g(z) = z^2 \cdot g_1(z), \quad \Rightarrow g^{10}(z) = z^{20} \cdot g_1^{10}(z). \tag{70}$$

где $g_1(z) \neq 0$. Для числителя это будет нуль порядка 20. Поскольку разложение синуса имеет вид:

$$\sin z = z\left(1 - \tfrac{z^2}{3!} + \ldots\right) = z \cdot h_1(z), \quad h_1(0) \neq 0, \tag{71}$$

$$\sin^{2014} z = z^{2014} \cdot h_1^{2014}(z), \tag{72}$$

а потому для знаменателя точка 0 - нуль 2014-го порядка. Отсюда следует, что точка 0 - полюс 1994-го порядка функции f.

Возможный вопрос:

Рассмотреть функцию $\frac{1}{\sin z}$.

Точка 0 - полюс первого порядка для данной функции, поскольку

$$\sin 0 = 0, \quad (\sin z)'\big|_0 = \cos 0 = 1 \neq 0. \tag{73}$$

Точка ∞ - неизолированная особая точка, поскольку есть полюса $z = \pi n$, и в любой окрестности бесконечности (внешности круга с центром в нуле и некоторым радиусом) будут лежать и другие особые точки. В неизолированной особой точке ряда Лорана нет (поскольку сумма ряда Лорана не будет регулярной ни в одной окрестности бесконечности, что противоречит рассмотренным теоремам).

Вычеты. Вычисление интегралов по замкнутому контуру при помощи вычетов.

Определение (вычет в конечной точке):

Пусть $a \in \mathbb{C}$ - изолированная особая точка функции f. Тогда вычет функции f в точке a есть:

$$\operatorname*{res}_a \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^+} f(z)\, dz, \qquad \rho \in (0; \delta) \tag{74}$$

где интеграл считается по любой положительно ориентированной окружности, которая попала внутрь той δ-окрестности, в которой функция регулярна (такая δ-окрестность существует, поскольку точка - изолированная).

Это число от ρ не зависит (теоретически можно брать не окружность, а любую другую замкнутую кривую, охватывающую a, - квадрат, шестиугольник, и т.д.)

Формулы для вычетов в конечной точке:

1. Вычет в конечной точке равен коэффициенту ряда Лорана в δ-окрестности точки при слагаемом $\frac{1}{z}$:
$$\operatorname*{res}_a f = c_{-1}. \tag{75}$$
Это соотношение следует из того, что для коэффициентов ряда Лорана справедлива формула:
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n-1}} d\xi, \tag{76}$$
$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^+} f(\xi)\, d\xi. \tag{77}$$

2. Если $a \in \mathbb{C}$ - устранимая особая точка, то
$$\operatorname*{res}_a f = 0, \tag{78}$$
поскольку в устранимой особой точке ряд Лорана не содержит дробей.

3. Если $a \in \mathbb{C}$ - полюс порядка N, то

$$\operatorname*{res}_{a} f = \frac{1}{(N-1)!} \cdot \lim_{z \to a} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \left(f(z) \cdot (z-a)^N \right) \tag{79}$$

Данная формула выводится из разложения ряда Лорана в окрестности полюса:

$$f(z) = \tfrac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \ldots + \tfrac{c_{-1}}{z-a} + \ldots \Big| \cdot (z-a)^n \tag{80}$$

$$f(z)(z-a)^N = c_{-N} + \ldots c_{-1}(z-a)^{N-1} + \ldots \Big| \tfrac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \tag{81}$$

$$\tfrac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \left(f(z)(z-a)^N \right) = c_{-1} \cdot (N-1)! + c_0 N! (z-a) + \ldots \tag{82}$$

В частности, при $N = 1$:

$$\operatorname*{res}_{a} f = \lim_{z \to a} \left(f(z) \cdot (z-a) \right) \tag{83}$$

В частности, если полюс первого порядка получается как нуль первого порядка знаменателя дроби, т.е.

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad \text{где } g(a) \neq 0,\ h(a) = 0,\ h'(a) \neq 0, \tag{84}$$

то вычет в этой точке считается как:

$$\operatorname*{res}_{a} f = \frac{g(a)}{h'(a)}. \tag{85}$$

4. Если $a \in \mathbb{C}$ - существенно особая точка, то для неё есть только формула из п.1.

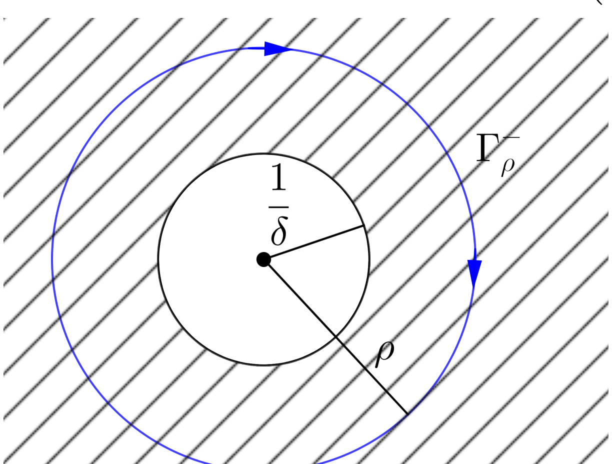
Определение (вычет в точке бесконечность):

Пусть ∞ - изолированная особая точка функции f, тогда вычет в бесконечности есть:

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^-} f(z)\, dz, \tag{86}$$

где

$$\exists \delta > 0 :\ f \in C^1 \left(|z| > \frac{1}{\delta} \right), \quad \rho \in \left(\frac{1}{\delta}; +\infty \right). \tag{87}$$



В обоих определениях ориентация окружности выбрана так, что при движении по окружности центр окресности остаётся слева.

Формулы для вычетов в бесконечности

1. $$\underset{\infty}{\mathrm{res}} f = -c_{-1}, \tag{88}$$

   где c_{-1} - коэффициент ряда Лорана для $f \in |z| > \frac{1}{\delta}$:

   $$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \tag{89}$$

   Минус образуется из-за ориентации окружности - в определении коэффициентов ряда Лорана она всегда положительна, а в определении вычета в точке ∞ она отрицательна.

2. Если ∞ - устранимая особая точка f, то

   $$\underset{\infty}{\mathrm{res}} f = \lim_{z\to\infty} z\left(f(\infty) - f(z)\right), \tag{90}$$

   где

   $$f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z). \tag{91}$$

   Данная формула выводится из вида ряда Лорана в окрестности устранимой особой точки:

   $$f(z) = c_0 + \tfrac{c_{-1}}{z} + \ldots \Big| \cdot z \tag{92}$$
   $$z \cdot (f(z) - c_0) = c_{-1} + \tfrac{c_2}{2z} + \ldots \tag{93}$$
   $$c_0 = \lim_{z\to\infty} f(z) = f(\infty) \tag{94}$$

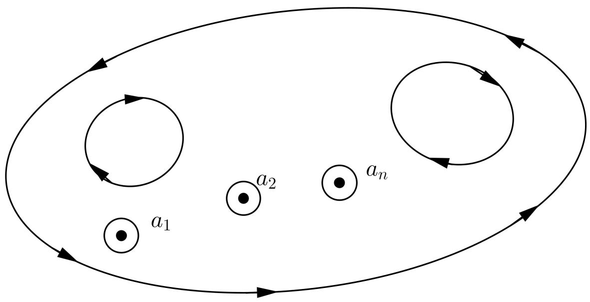
Теорема (Коши о вычетах):

Пусть G - область с кусочно-гладкой границей (не обязательно ограниченная). Пусть есть конечное число точек: $a_1, \ldots, a_n \in G$. Если G - неограниченная область, то считаем, что она содержит ∞ с её окрестностью (например, верхняя полуплоскость - неограниченная область, но точка ∞ не лежит вместе со своей окрестностью). В этом случае считаем, что $a_n = \infty$. Пусть функция f регулярна в этой области, за исключением указанных точек (раз их конечное число, то они изолированные):

$$f \in C^1\left(G \backslash \{a_1, \ldots, a_n\}\right). \tag{95}$$

Пусть f непрерывно продолжается на границу области (за исключением особых точек):

$$f \in C\left(\overline{G} \backslash \{a_1, \ldots, a_n\}\right). \tag{96}$$



Тогда интеграл по границе области:

$$\int\limits_{(\partial G)^+} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{a_j} f \right). \tag{97}$$

Данная теорема является обобщением обычной теоремы Коши - все особые точки заключаются в
непересекающиеся круги, область становится областью с дырками, в ней функция регулярна, интеграл по границе такой области есть ноль, но в то же время граница состоит из старой границы и окружностей, а интегралы по окружностям есть $2\pi i$, помноженное на соответствующий вычет (следует из определения вычета). Физический смысл состоит в том, что поведение регулярных функций в области полностью задаётся поведением функций в окрестности особых точек.

Следствие (теорема Коши о полной сумме вычетов):

Пусть функция регулярна во всём $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа особых точек:

$$f \in C^1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ \ldots, a_n\}). \tag{98}$$

Тогда полная сумма вычетов во всех этих конечных точек и вычета в бесконечности есть ноль:

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{a_i} f + \operatorname*{res}_{\infty} f = 0. \tag{99}$$

Возможный вопрос:

Найти вычет функции $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ в точке $z = 0$.

Решение:

В первую очередь нужно проверить задачу на корректность. В данном случае $z = 0$ не является изолированной особой точкой, поскольку есть последовательность полюсов $\frac{1}{\pi n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Таким образом, вычет в нуле не определен.