ЛЕКЦИЯ 2

Дифференцируемость функции комплексного переменного

2.1. Дифференцируемость функции

Определение 2.1. Пусть:

$$G \in \mathbb{C}, \quad G \neq 0.$$

Точка $z_0 \in G$ называется **внутренней точкой** множества G (обозначается $z \in \operatorname{int} G$), если она принадлежит G с какой-то открытой окрестностью, то есть:

$$\exists \delta > 0 : \; B_\delta(z_0) \subset G.$$

Определение 2.2. Пусть есть функция:

$$f : \; G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

Пусть есть точка:

$$z_0 \in \operatorname{int} G.$$

Тогда если:

$$\exists \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0),$$

то функция f — **дифференцируема** в точке z_0 (обозначается $f \in D(z_0)$), а f' — ее **производная**.

Замечание 2.1. Функция — дифференцируема в точке z_0, то есть:

$$f \in D(z_0)$$

тогда и только тогда, когда:

$$\Delta f = f'(z_0) \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z),$$

где:

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0),$$

а α — функция комплексного переменного такая, что:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} = 0.$$

Теорема 2.1 (**Условия Коши-Римана**)**.** *Пусть функция:*

$$f = u(x, y) + iv(x, y), \quad G \to \mathbb{C},$$

где $z = x + iy$.

Пусть точка:

$$z_0 = x_0 + iy_0.$$

Тогда:

$$\exists f'(z_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} u, \quad G \subset \mathbb{R}^2, \quad U \in D\Big((x_0, y_0)\Big), \\ v \in D\Big((x_0, y_0)\Big), \\ u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0), \\ u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0). \end{cases}$$

Тогда также если $\exists f'(z_0)$, то:

$$f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0).$$

Суть теоремы 2.1 в том, что она является критерием дифференцируемости в точке.

□ В доказательстве используется замечание 2.1 и определение дифференцируемости функции в точке в $\mathbb{R}^2$ из математического анализа.

Первая часть ($\Rightarrow$): пусть:

$$\exists f'(z_0) = a + bi.$$

Тогда по замечанию 2.1 приращение функции выглядит так:

$$\Delta u + i\Delta v = \Delta f = (a + bi)\Delta z + \alpha(\Delta z),$$

где:

$$\Delta u = u(z_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0),$$
$$\Delta v = v(z_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0).$$

Приравняем (так как комплексные числа совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их соответствующие действительные и мнимые части):

$$\begin{cases} \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y), \\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \alpha_2(\Delta x, \Delta y). \end{cases}$$

Так как из условия теоремы следует, что:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} = 0,$$

то это равносильно тому, что:

$$\left| \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} \right| \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta z \to 0.$$

Рассмотрим оценку:

$$0 \leqslant \Big|\alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Big| \leqslant \Big|\alpha(\Delta z)\Big|.$$

Оценка верна, так как катет прямоугольного треугольника не длиннее гипотенузы. Тогда разделим далее:

$$0 \leqslant \frac{\big|\alpha_1(\Delta x, \Delta y)\big|}{\big|\Delta z\big|} \leqslant \frac{\big|\alpha(\Delta z)\big|}{\big|\Delta z\big|}.$$

Получается, что:

$$0 = 0, \qquad \frac{\big|\alpha(\Delta z)\big|}{\big|\Delta z\big|} \to 0,$$

а значит, что функция ограничена двумя функциями, стремящимися к нулю. По теореме из математического анализа *«о двух милиционерах»* получим:

$$\exists \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\big|\alpha_1(\Delta x, \Delta y)\big|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0,$$

используя, что:

$$\Delta z \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0. \end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{\alpha_1(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} \Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0. \end{cases}$$

Следовательно, функция u — дифференцируема в точке (x_0, y_0) по определению дифференцируемости из математического анализа, причем:

$$\begin{cases} u'_x(x_0, y_0) = a, \\ u'_y(x_0, y_0) = -b. \end{cases}$$

Аналогично можно провести выкладки для функции v и убедиться в том, что:

$$\begin{cases} v'_x(x_0, y_0) = b, \\ v'_y(x_0, y_0) = a. \end{cases}$$

Итак, получаем:

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \end{cases}$$

Вторая часть ($\Leftarrow$): из условия теоремы следует, что:

$$u \in D\Big((x_0, y_o)\Big), \quad v \in D\Big((x_0, y_o)\Big),$$

причем:

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \end{cases}$$

Рассмотрим в точке z_0 приращение функции:

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v.$$

Так как u и v — дифференцируемы в точке (x_0, y_0), то запишем иначе:

$$\Delta f = \Big(u'_x(x_0, y_0)\Delta x + u'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_1(x_0, y_0)\Big) + \\ + i\Big(v'_x(x_0, y_0)\Delta x + v'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_2(x_0, y_0)\Big).$$

Заменим далее v_y на u_x, а u_y $(-v_x)$:

$$\Delta f = \Big(u_x\Delta x - v_x\Delta y + \alpha_1\Big) + i\Big(v_x\Delta x + u_x\Delta y + \alpha_2\Big) = \\ = \big(u_x + iv_x\big)\big(\Delta x + i\Delta y\big) + \alpha_1 + i\alpha_2.$$

Рассмотрим функцию:

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2.$$

Из-за дифференцируемости функций u и v:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\alpha_1(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0.$$

Аналогично получим для α_2. Тогда проведем следующую оценку:

$$0 \leqslant \Big|\alpha(\Delta z)\Big| \leqslant \Big|\alpha_1(\Delta x,\Delta y)\Big| + \Big|\alpha_2(\Delta x,\Delta y)\Big|.$$

Разделим:

$$0 \leqslant \frac{\big|\alpha(\Delta z)\big|}{\big|\Delta z\big|} \leqslant \frac{\big|\alpha_1(\Delta x,\Delta y)\big|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} + \frac{\big|\alpha_2(\Delta x,\Delta y)\big|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}.$$

Заметим, что:

$$0 = 0, \quad \frac{\big|\alpha_1(\Delta x,\Delta y)\big|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \to 0, \quad \frac{\big|\alpha_2(\Delta x,\Delta y)\big|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \to 0,$$

значит, по теореме «о двух милиционерах»:

$$\exists \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\big|\alpha(\Delta z)\big|}{\big|\Delta z\big|} = 0.$$

Следовательно, по замечанию 2.1, f — дифференцируема в точке z_0, причем:

$$f'(z_0) = u'_x(x_0,y_0) + iv'_x(x_0,y_0),$$

а значит, теорема доказана. ■

Замечание 2.2. Свойства модулей дословно переносятся из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$, а именно:

$$\big|z_1z_2\big| = \big|z_1\big|\cdot\big|z_2\big|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\big|z_1\big|}{\big|z_2\big|},$$

что было использовано в доказательстве теоремы 2.1.

Пример 2.1. Есть функция:

$$f(z) = \overline{z} = x - iy.$$

Рассмотрим, где она дифференцируема. Тогда:

$$u(x,y) = x, \quad v(x,y) = -y.$$

Функции:

$$u \in D(\mathbb{R}^2), \quad v \in D(\mathbb{R}^2)$$

как элементарные функции.

Рассмотрим производные:

$$u_x = 1 \neq v_y = -1$$

в точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Значит, хоть и выполняется условие:

$$u_y = 0 = v_x = 0,$$

но все равно:

$$\nexists f'(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Для лучшего понимания темы будем рассматривать функцию $f(z) = \overline{z}$ подробнее. Эта функция является отображением плоскости, при котором происходит отражение плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно оси Ox (см. рис. 2.1).

На рисунке 2.1 показано, что угол при отражении не сохраняется. Это происходит, потому что меняется ориентация угла, а раз изменяется знак угла, то угол не сохраняется.

Этим иллюстрируется тот факт, что понятие дифференцируемости в $\mathbb{C}$ гораздо строже, чем в $\mathbb{R}$.

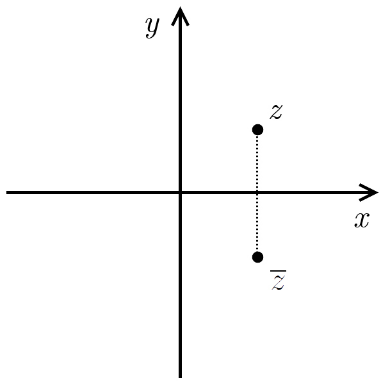

Рис. 2.1.

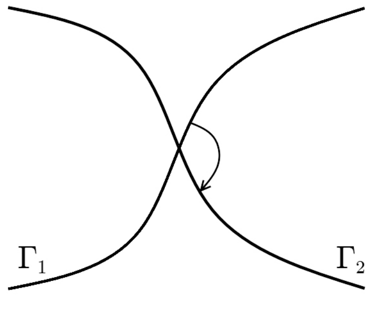

Рис. 2.2.

Замечание 2.3. Из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$ переносятся все основные свойства производной, то есть:

1) Если функция дифференцируема в точке, то она в ней непрерывна:

$$f \in D(z_0) \Rightarrow \quad f \in \mathbb{C}(z_0).$$

2) Если:

$$f \in D(z_0), \quad g \in D(z_0),$$

то верны свойства:

$$(f+g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg',$$

$$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad g(z_0) \neq 0.$$

3) Если $f(z_0)$ — внутренняя точка $D(g)$ (области определения g), то есть:

$$f \in D(z_0), \quad g \in D\Big(f(z_0)\Big),$$

то верно свойство:

$$\Big(g\big(f(z_0)\big)\Big) = g'\big(f(z_0)\big) \cdot f'(z_0).$$

2.2. Регулярные функции

Определение 2.3. Множество $G \in \mathbb{C}$ — **открытое**, если каждая его точка — внутренняя, то есть:

$$\forall z_0 \in G \quad z_0 \in \operatorname{int} G.$$

Определение 2.4. Если множество $G \in \mathbb{C}$ — открытое, то оно является **связным** множеством, если любые его две точки можно соединить кривой, целиком лежащей в G, то есть:

$$\forall z_1, z_2 \in G \quad \exists \gamma : \ \big[t_0, t_1\big] \to G, \quad \gamma(t_0) = z, \quad \gamma(t_1) = z_1.$$

Определение 2.5. Открытое связное множество $G \in \mathbb{C}$ называется **областью**.

Определение 2.6. Пусть G — область в $\mathbb{C}$, а функция:

$$f : \ G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

Тогда функция f — **регулярна** в G, если:

$$f \in \mathbb{C}^1(G),$$

то есть существует f' в G, и она непрерывна в G.

Определение 2.7. Функция f **регулярна в точке** $z_0 \in \mathbb{C}$, если:

$$f' \in \mathbb{C}^1\Big(B_\delta(z_0)\Big).$$

Замечание 2.4. Верна **лемма Гурса**: если G — область, а функция $f \in D(G)$, то:

$$f \in \mathbb{C}^1(G).$$

Рассмотрим различные примеры регулярных функций:

Пример 2.2. Имеется функция:

$$f(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Проверим ее на регулярность:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^n - z_0^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0^n + n z_0^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{2} z_0^{n-2} \cdot (\Delta z)^2 + \cdots - z_0^n}{\Delta z} =$$
$$= n \cdot z_0^{n-1} \Rightarrow \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \quad f'(z) = n \cdot z^{n-1}.$$

Так как f' — опять степенная функция, то f' является дифференцируемой в $\mathbb{C}$, а значит — непрерывной в $\mathbb{C}$. Таким образом, f' — регулярна в $\mathbb{C}$.

Определение 2.8. Для комплексных чисел **экспонента** определяется следующим образом:

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x\big(\cos y + i \sin y\big), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad z = x + iy.$$

Пример 2.3. Проверим свойства экспоненты:

$$u(x, y) = \mathrm{e}^x \cdot \cos y, \quad v(x, y) = \mathrm{e}^x \cdot \sin y.$$

Как элементарные функции:

$$u \in D(\mathbb{R}^2), \quad v \in D(\mathbb{R}^2).$$

Тогда запишем:

$$u_x = \mathrm{e}^x \cdot \cos y = v_y,$$

$$u_y = -\mathrm{e}^x \sin y = -v_y,$$

значит, выполнены условия Коши-Римана.

Следовательно, по теореме 2.1 эта функция дифференцируема в каждой точке $\mathbb{C}$:

$$f \in D(\mathbb{C}),$$

а также:

$$f'(z) = u'_x(x, y) + iv_x(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y + i\,\mathrm{e}^x \sin y = \mathrm{e}^z \Rightarrow \quad (\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z\,.$$

Из дифференцируемости снова следует непрерывность, а из непрерывности — регулярность, то есть:

$$f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{C}).$$

Определение 2.9. **Тригонометрические** и **гиперболические** функции для комплексных чисел определяются так:

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{\mathrm{e}^{iz} - e^{-iz}}{2},$$

$$\cosh z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

Тригонометрические и гиперболические формулы для комплексных чисел следуют из **формулы Эйлера**:

$$\forall \varphi \in \mathbb{R} \quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

$$\forall \varphi \in \mathbb{R} \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Очевидно, что в $\mathbb{R}$ эти функции — верны.

Из примера 2.3 и свойств производной из замечания 2.3 (сумма, суперпозиция) следует, что:

$$(\cosh z)' = \left(\frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}\right)' = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2} = \sinh z.$$

Аналогично получим:

$$(\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z.$$

У всех четырех функций производные существуют и непрерывны, а следовательно, эти функции — регулярны.

Замечание 2.5. Для тригонометрических и гиперболических функций для комплексных чисел верны свойства:

$$\cosh(iz) = \cos z, \quad \cos(iz) = \cosh z, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$\sin(iz) = i \sinh z, \quad \sinh(iz) = i \sin z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Замечание 2.6. Из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$ дословно (без изменений) переносятся все формулы обычной тригонометрии и гиперболической тригонометрии, к примеру, следующие:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp sin z_1 \cdot \sin z_2.$$

Это замечание проще доказать позднее через теорему единственности, хотя каждую формулу несложно доказать и прямым вычислением.

2.3. Гармонические функции

Определение 2.10. Пусть G — область в $\mathbb{R}^2$. Тогда функция:

$$u: \ G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

называется **гармонической** в G, если выполнены условия:

$$u \in \mathbb{C}^2(G), \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ в } G.$$

Теорема 2.2. *Пусть G — область в $\mathbb{C}$. Функция f:*

$$f: \ G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f \in \mathbb{C}^1(G),$$

причем:

$$f = u + iv, \quad u \in \mathbb{C}^2(G), \quad v \in \mathbb{C}^2(G).$$

Тогда функции u и v являются гармоническими в области G.

Замечание 2.7. Теорема 2.2 верна и без дополнительного условия:

$$u \in \mathbb{C}^2(G), \quad v \in \mathbb{C}^2(G).$$

Это будет доказано позже.

Теорема 2.2 задает связь между регулярными функциями и гармоническими функциями. Докажем ее:

□ В доказательстве используется условие Коши-Римана. Из условия теоремы следует, что в G:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Рассмотрим тогда:

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yy} = -v_{xy}.$$

Сложим:

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

так как:

$$u \in \mathbb{C}^2(G), \quad v \in \mathbb{C}^2(G),$$

то есть, u — гармоническая в G. Аналогично доказывается, что функция v также является гармонической в G, что приводит к доказательству теоремы. ■

Теорема 2.3. *Пусть G — односвязная область в $\mathbb{R}^2$. Функция v — гармоническая в G. Тогда:*

$$\exists f \in \mathbb{C}^1(G): \ v = \operatorname{Im} f.$$

Суть теоремы 2.3 заключается в том, что регулярную функцию можно восстановить по ее половине (мнимой части).

Замечание 2.8. Область G — **односвязная**, если для любой замкнутой кривой γ:

$$\forall \gamma: \ \left[t_0, t_1\right] \to G \quad \exists G: \ \left[t_0, t_1\right] \times \left[0, 1\right] \to G \text{ — непрерывное}:$$
$$G(t, 0) = \gamma(t), \quad \forall t \in \left[t_0, t_1\right]; \quad G(t, 1) = z_0 \text{ для некоторой точки } z_o \in G.$$

Стягивание в точку при деформировании показано на рисунке 2.3.

На рисунке 2.4 показано, что окружность не является односвязной областью, как и любая область с «дырками» (см. рис. 2.5).

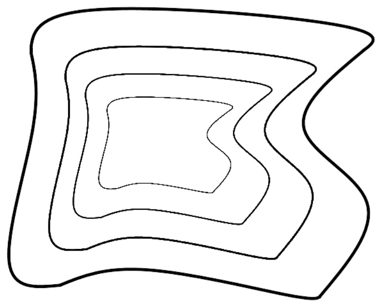

Рис. 2.3.

Замечание 2.9. Аналогичная теорема верна для:

$$v = \operatorname{Im} f.$$

Перейдем к доказательству теоремы 2.3:

□ В доказательстве используются условия Коши-Римана и теорема о существовании потенциала для векторного поля из математического анализа.

Искомая функция должна иметь вид:

$$f = u + iv.$$

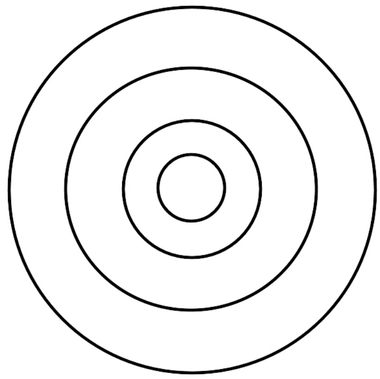

Рис. 2.4.

Здесь u — неизвестно. Так как по условию:

$$f \in \mathbb{C}^1(G),$$

то из условий Коши-Римана следует, что в G:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Обозначим:

$$u_x = v_y = P(x, y),$$

$$u_y = -v_x = Q(x, y).$$

По условию, функция v — гармоническая, то есть:

$$v \in \mathbb{C}^2(G) \Rightarrow \quad P, Q \in \mathbb{C}^1(G).$$

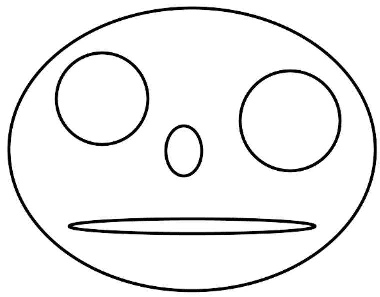

Рис. 2.5.

Также необходимо отметить, что:

$$P_y = v_{yy}, \quad Q(x) = -v_{xx},$$

следовательно:

$$P_y - Q_x = v_{yy} + v_{xx} = 0.$$

Следовательно, по теореме о существовании потенциала для векторного поля P, Q:

$$\exists u: \; u_x = p, \quad u_y = q \text{ в } G.$$

Таким образом, взяв функцию:

$$f = u + iv,$$

получим следующее:

$$f \in D(G),$$

так как по построению u и v связаны условиями Коши-Римана.

По тем же условиям Коши-Римана:

$$f' = u_x + iv_x.$$

Так как u и v — непрерывны в G, то f' — непрерывная в G, а следовательно:

$$f' \in \mathbb{C}^1(G),$$

что и требовалось доказать. ■