ЛЕКЦИЯ 7

Изолированные особые точки регулярной функции (продолжение). Теория вычетов

7.1. Изолированные особые точки регулярной функции

На прошлой лекции описывался ряд Лорана в окрестности особой точки. Рассматривались 3 случая:
1) устранимая особая точка,
2) полюс,
3) существенно особая точка.

Таким же образом охарактеризуем точку ∞.

Теорема 7.1 (Характеризация изолированной особой точки ∞ через ряд Лорана)**.** *Пусть точка ∞ — изолированная особая точка функции f. Тогда верно следующее:*

1) ∞ — **устранимая особая точка** *f $\Leftrightarrow$ ряд Лорана выглядит следующим образом:*

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots = \sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n, \quad \forall z \in B_\delta(\infty) \text{ для некоторого } \delta > 0,$$

т. е. существует конечный предел.

2) ∞ — **полюс** *f $\Leftrightarrow$ ряд Лорана:*

$$f(z) = c_N z^N + \dots + c_1 z + \sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n, \qquad \text{где } c_N \neq 0 \quad \forall z \in B_\delta(\infty) \text{ для некоторого } \delta > 0,$$

т. е. существует бесконечный предел.

3) ∞ — **существенно особая точка** *f $\Leftrightarrow$ ряд Лорана для f в некоторой $B_\delta(\infty)$ содержит бесконечно много ненулевых слагаемых при положительных степенях, т. е. если не существует предела.*

□ Идея доказательства — делается замена $\xi = \frac{1}{z}$, и используются аналогичные теоремы для изолированной особой точки $a \in \mathbb{C}$.

Есть функция $f = f(z)$, ∞ — изолированная особая точка. Рассматриваем замену переменных $\xi = \frac{1}{z}$. Тогда $g(\xi) \equiv f(\frac{1}{z})$.

Т. к. с учётом этой замены верно следующее:

$$\lim_{\xi \to 0} g(\xi) = \lim_{z \to \infty} f(z),$$

то сохраняется тип особой точки: ξ_0 — изолированная особая точка для g, как ∞ для f.

Т. к. $\xi_0 = 0$ — изолированная особая точка для g, то

$$\exists \delta > 0 : g(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \xi^n \quad \forall \xi \in \dot{B}_\delta(0).$$

Если в этом ряду подставить $\xi = \frac{1}{z}$, то получим ряд Лорана для f в окрестности точки ∞:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad \text{где } c_{-n} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, равносильны следующие 4 утверждения:

1) ∞ — устранимая особая точка f,
2) 0 — устранимая особая точка g,
3) в окрестности точки $\xi_0 = 0$

$$g(\xi) = b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2,$$

4) в окрестности точки ∞

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots$$

Аналогично можно доказать пункты 2) и 3). ■

Следствие 7.1 (Критерий полюса)**.** *Пусть* ∞ *— изолированная особая точка функции* f*. Тогда* ∞ *— полюс* $f \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = z^N \cdot g(z)$*, где* $g(z) \in C^1(B_\delta(\infty))$ *для некоторого* $\delta > 0$*, и*

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = A \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

□ Из п. 2 теоремы 7.1: ∞ — полюс $f \quad \Leftrightarrow \quad$ ряд Лорана

$$f(z) = c_N z^N + \ldots + c_1 z + \sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n, \quad c_N \neq 0.$$

Выносим за знак ряда z^N:

$$f(z) = z^N \left(c_N + \frac{c_{N-1}}{z} + \frac{c_{N-2}}{z^2} \ldots\right),$$

Обозначим

$$g(z) = \left(c_N + \frac{c_{N-1}}{z} + \frac{c_{N-2}}{z^2} \ldots\right).$$

Заметим, что $g(z) \in C^1(B_\delta(\infty))$ для некоторого $\delta > 0$, и

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = c_N \neq 0,$$

т. е. $f(z) = z^N \cdot g(z)$, что и требовалось доказать. ■

Определение 7.1 (Порядок полюса в точке ∞)**.** В условиях следствия 7.1 число $N \in \mathbb{N}$ называется **порядком полюса в точке** ∞ для функции f.

Если в окрестности точки ∞

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n}_{\text{I}} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n}_{\text{II}},$$

то часть I называется **главной частью** ряда Лорана, а часть II называется **правильной частью** ряда Лорана.

Теорема 7.2 (Сохоцкого)**.** *Пусть $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — существенно особая точка функции f. Тогда множество частичных пределов в этой точке будет занимать всё пространство $\overline{\mathbb{C}}$ такое, что*

$$\forall A \in \overline{\mathbb{C}} \quad \exists \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a, \quad f(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A.$$

□ Докажем для $A = \infty$ с помощью неравенства Коши для коэффициентов c_n ряда Лорана и сведем к общему случаю.

Пусть $A = \infty$. Заметим, что т. к. a — существенно особая точка f, то $|f|$ не является ограниченной в любой окрестности точки ∞.

Предположим противное: допустим, что

$$\exists \delta > 0, M > 0 : |f(z)| \leqslant M \quad \forall z \in \dot{B}_\delta(a),$$

т. е. f ограничена. По неравенствам Коши для коэффициентов c_n (лекция 6) верно следующее:

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n} \quad \forall \rho \in (0, \delta), \quad \text{если } a \in \mathbb{C}.$$

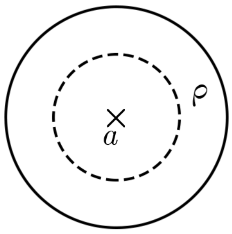

Рис. 7.1.

Отсюда

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n} = M \cdot \rho^{-n} \xrightarrow[\rho\to+0]{n<0} 0 \quad \Rightarrow \quad c_n = 0 \quad \text{при } n < 0.$$

Следовательно (из вида ряда Лорана), a — устранимая особая точка .

Если $a = \infty$ и

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n} \quad \forall \rho \in (\frac{1}{\delta}, +\infty).$$

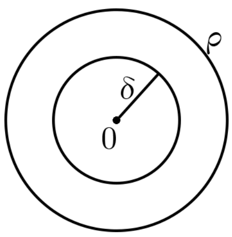

Рис. 7.2.

Тогда

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n} \xrightarrow[r\to+\infty]{n>0} 0 \quad \Rightarrow \quad c_n = 0 \quad \text{при } n > 0.$$

Следовательно, ∞ — устранимая особая точка.

В обоих случаях противоречие с тем, что a — существенно особая точка. Таким образом функция, действительно, неограничена в любой проколотой окрестности точки a.

Т. к. f неограничена в любой окрестности точки a, то

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists z_n \in \dot{B}_{\frac{1}{n}}(a) \text{ (или } z_n \in B_{1/n}(\infty), \text{ т. е. } |z_n| > n), \quad |f(z_n)| > n,$$

т. е. $f(z_n) \to \infty = A$.

Общий случай: пусть $A \neq \infty$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A} \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} + A.$$

Заметим, что т. к. не существует никакого предела у функции $f(z)$ в точке A, то и у функции $\varphi(z)$ в этой точке нет предела.

По доказанному выше, если в роли $f(z)$ взять $\varphi(z)$, то для $\varphi(z)$

$$\exists \{z_n\}, z_n \to a : \varphi(z_n) \xrightarrow{n \to \infty} \infty.$$

■

Теорема 7.3 (Пикара)**.** *Пусть $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — существенно особая точка функции f. Тогда*

$$\exists b \in \mathbb{C} : \quad \forall A \in \mathbb{C} \backslash \{b\} \quad \exists \{z_n\}, z_n \to a : f(z_n) = A \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□ Доказательство этой теоремы довольно длинное, поэтому в этому курсе приводить его не будем. ■

Пример 7.1 (Число b для экспоненты)**.** $f(z) = e^z$, $a = \infty$ — существенно особая точка (из ряда Лорана).

Учитывая, что e^{iy} — точка на единичной окружности, заметим, что

$$|e^z| = |e^x e^{iy}| = e^x \cdot |e^{iy}| = e^x \cdot 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \Rightarrow \quad b = 0.$$

7.2. Вычеты

Определение 7.2 (Вычет)**.** Пусть $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции f, т. е. существует $\delta > 0$: $f \in C^1(\dot{B}_\delta(a))$.

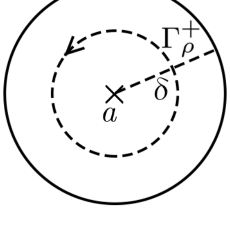

Рис. 7.3.

Тогда

$$\operatorname*{res}_a f \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^+(a)} f(\xi)\, d\xi$$

называется **вычетом** f в точке a.

$$\Gamma_\rho(a) = \{|z-a| < \rho\}, \quad \forall \rho \in (0, \delta).$$

Вычет является локальной информацией функции.

7.2.1. Формулы для $\operatorname*{res}_a f$

Если $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка f, то

$$\exists \delta > 0 : \quad \forall z \in \dot{B}_\delta(a), f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^+(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Возьмем $n = -1$:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^+(a)} f(\xi)\, d\xi = \operatorname*{res}_a f,$$

поэтому

$$\operatorname*{res}_a f = c_{-1}.$$

Заметим, что если a — устранимая особая точка f, то ряд Лорана имеет вид:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots \quad \forall z \in \dot{B}_\delta(a) \quad \Rightarrow \quad c_{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname*{res}_a f = 0.$$

Итог: если $a \in \mathbb{C}$ — устранимая особая точка, то $\operatorname*{res}_a f = 0$.

Утверждение 7.1 (Формула для вычета в полюсе порядка N)**.** Пусть $a \in \mathbb{C}$ — полюс порядка $N \in \mathbb{N}$ для f. Тогда

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to a} \left(\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} (f(z)(z-a)^N) \right).$$

□ Для доказательства воспользуемся разложением f в ряд Лорана.
Т. к. $a \in \mathbb{C}$ — полюс порядка N, то

$$f(z) = \frac{C_{-N}}{(z-a)^N} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad \forall z \in \dot{B}_\delta(a) \text{ при некотором } \delta > 0.$$

Тогда

$$(z-a)^N f(z) = c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \ldots + c_{-1}(z-a)^{N-1} + \ldots \quad \forall z \in \dot{B}_\delta(a),$$

$$\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \left((z-a)^N f(z) \right) = c_{-1} \cdot (N-1)! + c_0 \cdot (z-a) N! + \ldots$$

При выполненных операциях кольцо сходимости не изменилось. Тогда

$$\lim_{z \to a} \left(\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} (f(z) \cdot (z-a)^N) \right) = c_{-1} \cdot (N-1)!.$$

Так $c_{-1} = \operatorname*{res}_a f$. ■

Утверждение 7.2 (Вычет в полюсе первого порядка)**.** Если $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, $a \in \mathbb{C}$, причем $g, h \in C^1(B_\delta(a))$ для некоторого $\delta > 0$, $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$. Тогда

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

☐ Из утверждения 7.1 при $N = 1$ заметим, что из условия a — полюс первого порядка. Тогда

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{0!} \lim \left(f(z)(z-a)\right) = \lim_{z\to a} \left(\frac{g(z)}{h(z)}(z-a)\right) = \Big| h(a) = 0 \Big| = \lim_{z\to a} \frac{g(z)}{\dfrac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

■

Определение 7.3 (Вычет f в точке ∞)**.** Пусть ∞ — изолированная особая точка функции f, то есть $f \in C^1(B_\delta(\infty))$ для некоторого $\delta > 0$.

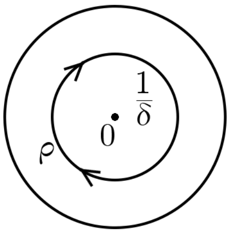

Рис. 7.4.

Тогда

$$\operatorname*{res}_\infty f \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^-} f(\xi)\, d\xi, \quad \text{где } \Gamma_\rho = \{|z| = \rho\}, \quad \forall \rho \in (\frac{1}{\delta}, +\infty),$$

называется **вычетом f в точке** ∞.

Поскольку окружности выбираются в кольце, где функция регулярна, то интеграл от ρ не зависит по теореме Коши.

7.2.2. Формулы для $\operatorname*{res}_\infty f$

Т. к. ∞ — изолированная особая точка f, то $\forall z \in B_\delta(\infty)$ при некотором $\delta > 0$ верно

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad \text{где } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При $n = -1$

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^+} f(\xi)\, d\xi = -\operatorname*{res}_\infty f.$$

Таким образом $\operatorname*{res}_\infty f = -c_{-1}$.

Грубое объяснение, почему вычет бесконечности считается по отрицательному обходу контура: при обходе окружности центр окрестности — это точка бесконечность, остающаяся слева, как и в случае с конечной точкой.

Утверждение 7.3 (Вычет в устранимой точке ∞)**.** Пусть ∞ — устранимая особая точка f, тогда

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = \lim_{z\to\infty}(z(f(\infty) - f(z)), \quad \text{где } f(\infty) \equiv \lim_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}.$$

□ Для доказательства воспользуемся разложением f в ряд Лорана.
∞ — устранимая особая точка f. Тогда

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \quad \forall z \in B_\delta(\infty) \text{ при некотором } \delta > 0.$$

Тогда

$$f(z) - c_0 = \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \quad \forall z \in B_\delta(\infty).$$

Кольцо сходимости не изменилось.

$$z(f(z) - c_0) = c_{-1} + \frac{c_{-2}}{z} + \frac{c_{-3}}{z^2} + \dots$$

При

$$\lim_{z\to\infty}(z(f(z)) - c_0)) = c_{-1} = -\operatorname*{res}_{\infty} f, \quad \text{где } c_0 = \lim_{z\to\infty} f(z),$$

следовательно, утверждение доказано. ■

Теорема 7.4 (Коши о вычетах)**.** *Пусть G — область в $\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой границей (не обязательно ограниченная). Пусть рассматриваются точки $a_1, \dots a_k \in G$. Если $+\infty \in G$, то считаем, что $a_k = \infty$. Пусть функция*

$$f \in C^1(G\backslash\{a_1, \dots, a_k\}), \quad f \in C(\overline{G}\backslash\{a_1, \dots, a_k\}).$$

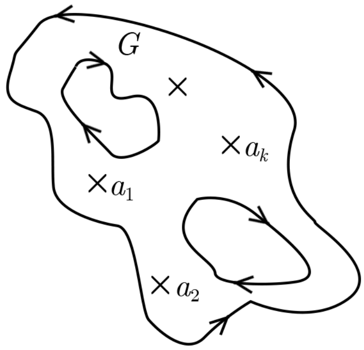

Рис. 7.5.

Тогда

$$\int\limits_{(\partial G)^+} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{a_j} f\right).$$

□ Для доказательства используется определение вычетов и обычная теорема Коши.

Т. к. G — область с кусочно-гладкой границей, то ∂G состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых, т. е. или G — ограниченная область, или если G — неограниченная область, то, учитывая, что граница G — компакт,

$$\exists R > 0 : \partial G \subset B_R(0), \{a_1, \ldots, a_k\} \subset B_R(0).$$

Рассмотрим I случай (G — ограничено)
Т. к. G — открыто, то

$$\exists r_1, \ldots r_k > 0 : \overline{B_{r_j}(a_j)} \cap \overline{B_{r_l}(a_l)} = \varnothing \quad \text{при } i \neq j, l_{i,j} \in \{1, \ldots k\},$$

$$\overline{B_{r_j}(a_j)_{j=1,\ldots,k}} \subset G, \quad \tilde{G} = G \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{k} \overline{B_{r_j}(a_j)} \right).$$

По условию $f \in C^1(\tilde{G})$, $f \in C(\overline{G})$. По теореме Коши для f и $\tilde{G}$ верно:

$$0 = \int\limits_{(\partial \tilde{G})^+} f(z)\, dz = \int\limits_{(\partial G)^+} f(z)\, dz + \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{(\partial B_{r_j}(a_j))^-} f(z)\, dz,$$

$$\Rightarrow \int\limits_{(\partial G)^+} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{(\partial B_{r_j}(a_j))^+} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{k} (2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{a_j} f)^k.$$

Теорема доказана для граничной области.

Рассмотрим II случай
Если G — неограниченная область, то (как было замечено выше)

$$\exists R > 0 : B_{1/R}(\infty) \subset G.$$

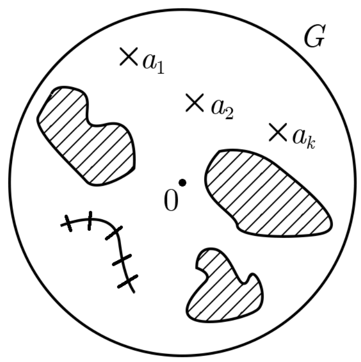

Рис. 7.6.

Рассмотрим вспомогательную область

$$\tilde{G} = (B_R(0) \cap G) \backslash \{a_1, \ldots, a_{k-1}\}, \quad \text{т. к. } a_k = \infty.$$

Т. к. $\tilde{G}$ — ограниченная область, то по доказанному выше для ограниченной $\tilde{G}$

$$\int\limits_{(\partial \tilde{G})^+} f(z)\, dz = \int\limits_{\partial B_R(0)^+} f(z)\, dz + \int\limits_{(\partial G)^+} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k-1} \operatorname*{res}_{a_j} f.$$

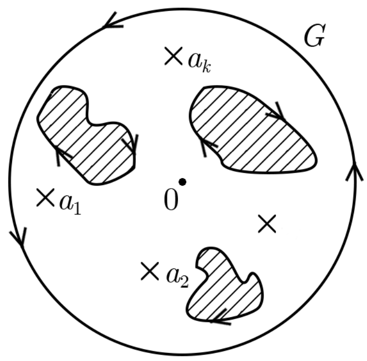

Рис. 7.7.

Т. к.

$$\int\limits_{(\partial G)^+} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\sum_{j=1}^{k-1}\operatorname*{res}_{a_j} f\right) + \int\limits_{\partial B_R(0)^-} f(z)\,dz,$$

и т. к. определение вычета в $+\infty$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B_R(0)^-} f(z)\,dz,$$

то теорема в общем случае доказана. ■

Следствие 7.2 (Теорема Коши о полной сумме вычетов)**.** *Пусть функция*

$$f \in C^1(\mathbb{C}\backslash\{a_1,\ldots a_k\}), \quad \text{где } a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{k}\operatorname*{res}_{a_j} f + \operatorname*{res}_{\infty} f = 0.$$

□ Для доказательства используется теорема Коши о вычетах.

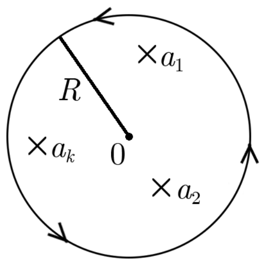

Рис. 7.8.

Т. к. точек $a_1,\ldots,a_k$ — конечное число, то

$$\exists R > 0 : \{a_1,\ldots,a_k\} \subset B_R(0).$$

Тогда для области $G = B_R(0)\backslash\{a_1,\ldots,a_k\}$ и для $f(z)$ по теореме 7.4

$$-2\pi i\operatorname*{res}_{\infty} f = \int\limits_{\partial B_R(0)^+} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\sum_{j=1}^{k}\operatorname*{res}_{a_j} f\right).$$

■

7.3. Примеры применения вычетов для нахождения интегралов

Пример 7.2.

$$I = \oint\limits_{|z-i|=1\backslash 2} \frac{dz}{z^2+1}.$$

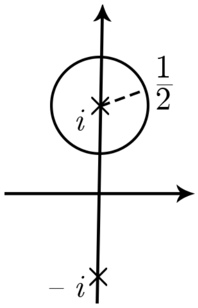

Рис. 7.9.

Из всех особые точки ($\pm i$) внутрь области попадает только одна. По теореме 7.4

$$I = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_i f, \quad \text{где } f = \frac{1}{z^2+1}.$$

Здесь i — полюс первого порядка, поэтому

$$I = 2\pi i \cdot \left.\frac{1}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi.$$

Пример 7.3.

$$I = \oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^8+1}.$$

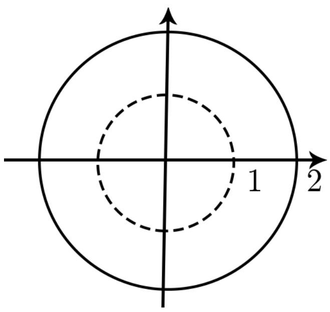

Рис. 7.10.

I способ

Все конечные особые точки — решения уравнения $z^8 = -1$. По следствию 7.1

$$\sum_{j=1}^{8} \operatorname*{res}_{a_j} f + \operatorname*{res}_{\infty} f = 0 \quad \Rightarrow \quad I = -2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{\infty} f.$$

При $z \to \infty$

$$\frac{1}{1+z^8} = \frac{1}{z^8} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z^8}} = \frac{1}{z^8} \cdot \left(1 - \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{16}} + \ldots\right) = \left| \left|\frac{1}{z^8}\right| < 1 \right| = \frac{1}{z^8} - \frac{1}{z^{16}} + \ldots$$

Т. к. $\frac{1}{z}$ нет в ряду, то $c_{-1} = 0$, а значит $\operatorname*{res}_{\infty} f = -c_{-1} = 0$.

<u>II способ (через утверждение 7.3)</u>

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = \lim_{z\to\infty} z \cdot (f(\infty) - f(z)) = \left| f(\infty) = 0 = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^8+1} \right| = \lim_{z\to\infty} z \left(0 - \frac{1}{1+z^8}\right) = 0.$$