ЛЕКЦИЯ 3

Интегрирование функции комплексного переменного вдоль кривой

3.1. Основные определения и свойства

Определение 3.1. Пусть есть непрерывное отображение:

$$\gamma : \ [t_0, t_1] \to \mathbb{C}.$$

Его образ:

$$\Gamma = \gamma\Big([t_0, t_1]\Big).$$

Тогда γ — **кривая** в $\mathbb{C}$.

Определение 3.2. Пусть есть кривая:

$$\Gamma = \gamma\Big([t_0, t_1]\Big),$$

где γ — непрерывное отображение:

$$\gamma : \ [t_0, t_1] \to \mathbb{C}.$$

Тогда Γ — **замкнутая кривая**, если:

$$\gamma(t_0) = \gamma(t_1).$$

Определение 3.3. Пусть есть кривая:

$$\Gamma = \gamma\Big([t_0, t_1]\Big),$$

где γ — непрерывное отображение:

$$\gamma : \ [t_0, t_1] \to \mathbb{C}.$$

Тогда Γ — **простая кривая**, если она не допускает самопересечений, то есть:

$$\forall t', t'' \in [t_0, t_1], \ t' \neq t'' \quad \gamma(t') \neq \gamma(t''),$$

кроме, возможно, случая:

$$\gamma(t_0) = \gamma(t_1).$$

Определение 3.4. Пусть есть кривая:

$$\Gamma = \gamma\Big([t_0, t_1]\Big),$$

где γ — непрерывное отображение:

$$\gamma : \ [t_0, t_1] \to \mathbb{C}.$$

Пусть также:

$$\gamma \in \mathbb{C}^1\Big([t_0, t_1]\Big),$$

то есть:

$$\gamma(t) = x(t) + ig(t), \quad x, y \in \big[t_0, t_1\big] \to \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{C}^1\Big(\big[t_0, t_1\big]\Big).$$

И пусть:

$$\gamma'(t) = 0 \quad \forall t \in \big[t_0, t_1\big],$$

где:

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0.$$

Тогда Γ — **гладкая кривая**.

Определение 3.5. Пусть есть кривая:

$$\Gamma = \gamma\Big(\big[t_0, t_1\big]\Big),$$

где γ — непрерывное отображение:

$$\gamma: \ \big[t_0, t_1\big] \to \mathbb{C}.$$

Пусть есть некое **разбиение**:

$$\theta = \big\{\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_p\big\} \subset \big[t_0, t_1\big],$$

то есть:

$$t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_p = t_1.$$

Тогда если на каждом отрезке:

$$\big[\theta_{j-1}, \theta_j\big], \quad j = 1, \ldots, p$$

кривая Γ будет гладкой кривой, то она называется **кусочно-гладкой кривой**.

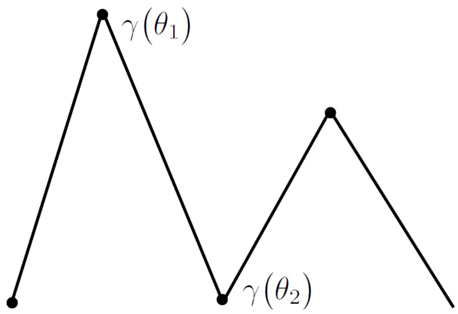

Рис. 3.1.

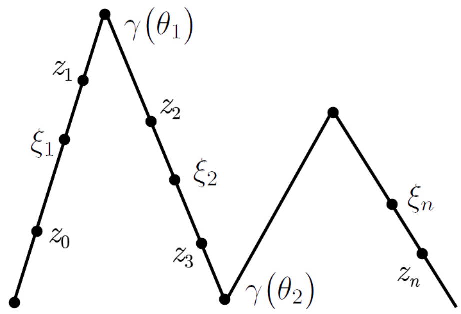

Рис. 3.2.

На рисунке 3.1 показано пояснение к определению 3.5. Видно, что изломы допускаются в точках $\gamma(\theta_j)$.

Определение 3.6. Пусть есть кусочно-гладкая кривая:

$$\Gamma = \gamma\Big(\big[t_0, t_1\big]\Big),$$

где γ — непрерывное отображение:

$$\gamma: \ \big[t_0, t_1\big] \to \mathbb{C}.$$

Пусть есть функция:

$$f:\ \Gamma \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

Пусть также задано **разбиение отрезка** $\big[t_0, t_1\big]$:

$$T = \big\{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n\big\} \subset \big[t_0, t_1\big],$$

то есть:

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n = t_1.$$

Тогда **мелкость разбиения** определяется следующим образом:

$$|T| = \max_{j=1,\ldots,n} \big|\tau_j - \tau_{j-1}\big|.$$

Определение 3.7. Пусть задан **выбор средних точек** (см. рис. 3.2 — звенья, на которые распалась кривая), то есть:

$$Z = \big\{\xi_1, \ldots, \xi_n\big\} \subset \Gamma,$$

где:

$$\xi_i \in \Big[Z_{j-1}, Z_j\Big] = \Big\{\gamma(t)\Big| t \in \big[\tau_{j-1}, \tau_j\big]\Big\}.$$

Также:

$$Z\jmath = \gamma\big(\tau_j\big), \quad j = 0, \ldots, n.$$

Тогда **интегральная сумма Римана** записывается следующим образом:

$$\sigma\big(f, T, Z\big) = \sum_{j=1}^{n} f\big(\xi_j\big)\, \Delta Z_j,$$

где:

$$\Delta Z_j = Z_j - Z_{j-1}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Определение 3.8. Если существует предел:

$$\lim_{|T|\to 0} \sigma\big(f, T, Z\big),$$

то он обозначается следующим образом:

$$I = \lim_{|T|\to 0} \sigma\big(f, T, Z\big) = \int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz,$$

то есть:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 :\ \forall\, T,\ |T| < \delta,\ \forall\, Z \quad \Big|\sigma\big(f, T, Z\big) - I\Big| < \varepsilon.$$

Утверждение 3.1. Пусть есть кусочно-гладкая кривая:

$$\Gamma = \gamma\Big(\big[t_0, t_1\big]\Big),$$

где γ — непрерывное отображение:

$$\gamma :\ \big[t_0, t_1\big] \to \mathbb{C}.$$

Пусть есть функция комплексного переменного:

$$f:\ \Gamma \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

непрерывная на Γ.

Тогда:

$$I = \int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma} \big(u + iv\big)\big(dx + i\,dy\big) = \int\limits_{\Gamma} \big(u\,dx - v\,dy\big) + i\int\limits_{\Gamma} \big(v\,dx + u\,dy\big).$$

Обозначим:

$$I_1 = \int\limits_{\Gamma} \big(u\,dx - v\,dy\big), \quad I_2 = \int\limits_{\Gamma} \big(v\,dx + u\,dy\big),$$

то есть:

$$I = I_1 + iI_2.$$

Имеется в виду, что если существуют интегралы I_1 и I_2, то существует интеграл I и выполняется указанное равенство.

Суть утверждения 3.1 — сведение к криволинейным интегралам второго рода из математического анализа. Докажем это утверждение:

□ В доказательстве используется определение 3.8 и определение криволинейного интеграла второго рода из математического анализа.

Рассмотрим:

$$\sigma\big(f, T, Z\big) = \sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_j\right)\Delta Z_j = \sum_{j=1}^{n}\Big(u\big(\xi_j^x, \xi_j^y\big) + iv\big(\xi_j^x, \xi_j^y\big)\Big)\cdot\big(\Delta z_j + i\Delta y_j\big).$$

Здесь имеется в виду, что рассматривается точка с координатами:

$$\xi_j = \big(\xi_j^x, \xi_j^y\big).$$

Тогда продолжим далее:

$$\sigma\big(f, T, Z\big) = \sum_{j=1}^{n}\Big(u\big(\xi_j^x, \xi_j^y\big)\Delta x_j - v\big(\xi_j^x, \xi_j^y\big)\Delta y_j\Big) + i\sum_{j=1}^{n}\Big(v\big(\xi_j^x, \xi_j^y\big)\Delta x_j + u\big(\xi_j^x, \xi_j^y\big)\Delta y_j\Big).$$

Обозначим:

$$\sigma_1 = \sum_{j=1}^{n}\Big(u\big(\xi_j^x, \xi_j^y\big)\Delta x_j - v\big(\xi_j^x, \xi_j^y\big)\Delta y_j\Big), \quad \sigma_2 = \sum_{j=1}^{n}\Big(v\big(\xi_j^x, \xi_j^y\big)\Delta x_j + u\big(\xi_j^x, \xi_j^y\big)\Delta y_j\Big).$$

Получился в точности объект из математического анализа:

$$\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2.$$

Заметим, что при $|T| \to 0$:

$$\sigma_1 \to I_1, \quad \sigma_2 \to I_2,$$

что следует из определения криволинейных интегралов второго рода из курса математического анализа.

Следовательно:

$$\exists \lim_{|T|\to 0} \sigma = I_1 + iI_2,$$

то есть показано, что:

$$I = I_1 + iI_2,$$

то есть интегралы I_1 и I_2 существуют, так как функция f — непрерывна на Γ, что и требовалось доказать. ■

Необходимо отметить, что у кусочно-гладкой кривой Γ, показанной на рисунке 3.3 и склеенной из гладких кусков, в точках склейки должны существовать односторонние производные.

Это происходит, потому что касательные вектора должны быть ненулевыми справа и слева, но не обязательно должны совпадать.

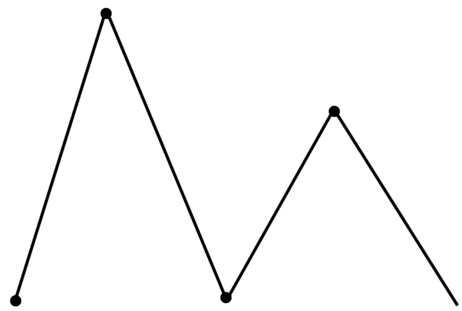

Рис. 3.3.

Таким образом, на кусочно-гладких кривых может наблюдаться разрыв производной первого рода.

Утверждение 3.2. Пусть есть кусочно-гладкая кривая:

$$\Gamma = \gamma\Big(\big[t_0, t_1\big]\Big),$$

где γ — непрерывное отображение:

$$\gamma: \ \big[t_0, t_1\big] \to \mathbb{C}.$$

Пусть есть функция, непрерывная на Γ:

$$f: \ \Gamma \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

Тогда верно следующее:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{t_o}^{t_1} f\big(\gamma(t)\big)\cdot\gamma'(t)\,dt.$$

Суть утверждения 3.2 — сведение к интегралу по отрезку. Докажем это утверждение:

□ В доказательстве используется утверждение 3.1 и аналогичная теорема для криволинейных интегралов второго рода из математического анализа.

Значит, используя вышесказанные факты, можно записать:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma}\big(u+iv\big)\big(dx+i\,dy\big) = \int\limits_{\Gamma}\big(u\,dx - v\,dy\big) + i\int\limits_{\Gamma}\big(v\,dx+u\,dy\big) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1}\Big(u\big(x(t),y(t)\big)\cdot x'(t) - v\big(x(t),y(t)\big)\cdot y'(t)\Big)\,dt +$$

$$+\,i\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big(v\big(x(t),y(t)\big)\cdot x'(t) + u\big(x(t),y(t)\big)\cdot y'(t)\Big)\,dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1}\Big(u\big(x(t),y(t)\big)+iv\big(x(t),y(t)\big)\Big)\big(x'(t)+iy'(t)\big)\,dt.$$

Окончательно получим:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{t_0}^{t_1} f\big(\gamma(t)\big)\cdot\gamma'(t)\,dt$$

что и требовалось доказать. ■

Замечание 3.1. Отметим ряд несложных в доказательстве свойств:

1) **Линейность.** Пусть есть кусочно-гладкая кривая:

$$\Gamma = \gamma\Big(\big[t_0, t_1\big]\Big),$$

где γ — непрерывное отображение:

$$\gamma:\ \big[t_0, t_1\big] \to \mathbb{C}.$$

Пусть есть непрерывные на γ функции f_1 и f_2.
Тогда верно следующее свойство:

$$\int\limits_{\Gamma}\Big(\alpha f_1(z) + \beta f_2(z)\Big)\,dz = \alpha\int\limits_{\Gamma} f_1(z)\,dz + \beta\int\limits_{\Gamma} f_2(z)\,dz, \quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$

2) **Линейность по кривой интегрирования.** Пусть есть кусочно-гладкая кривая:

$$\Gamma = \gamma\Big(\big[t_0, t_1\big]\Big),$$

где γ — непрерывное отображение:

$$\gamma:\ \big[t_0, t_1\big] \to \mathbb{C}.$$

Пусть есть непрерывная на γ функция f, причем:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$

то есть:

$$\begin{aligned}\exists t' \in \big[t_0, t_1\big] : \exists\gamma_1 :\ \big[t_0, t'\big] \to \mathbb{C} :\ \gamma_1(t) = \gamma(t), \quad \forall t \in \big[t_0, t'\big],\\ \exists\gamma_2 :\ \big[t', t_1\big] \to \mathbb{C} :\ \gamma_2(t) = \gamma(t), \quad \forall t \in \big[t', t_1\big],\end{aligned}$$

$$\Gamma_1 = \gamma_1\Big(\big[t_0, t'\big]\Big), \quad \Gamma_2 = \gamma_2\Big(\big[t', t_1\big]\Big).$$

Тогда выполняется свойство:

$$\int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

Эти два свойства следуют из утверждения 3.1 и из аналогичных свойств линейности криволинейных интегралов второго рода из курса математического анализа.

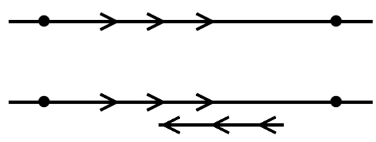

Рис. 3.4.

Необходимо пояснение о способе параметризации кривых: на рисунке 3.4 показано, что один и тот же отрезок может проходиться одни раз (без ограничения общности — слева направо), а может проходиться дважды (туда и обратно). Здесь же будет рассматриваться наиболее общая ситуация.

Сформулируем и докажем еще два свойства:

Утверждение 3.3. Пусть есть кусочно-гладкая кривая:

$$\Gamma = \gamma\Big(\big[t_0, t_1\big]\Big),$$

где γ — непрерывное отображение:

$$\gamma: \ \big[t_0, t_1\big] \to \mathbb{C}.$$

Пусть есть непрерывная на γ функция f.

Тогда верно следующее свойство:

$$\left|\int\limits_\Gamma f(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_\Gamma \big|f(z)\big|\big|dz\big|.$$

☐ Проведем доказательство для интегрирующей суммы σ и далее сделаем предельный переход:

$$\Big|\sigma\big(f, T, Z\big)\Big| = \left|\sum_{j=1}^{n} f\big(\xi_j\big)\,\Delta Z_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\Big|f\big(\xi_j\big)\Big|\Big|\Delta Z_j\Big|.$$

Так как функция f — непрерывна, то из курса математического анализа известно, что:

$$\Big|\sigma\big(f, T, Z\big)\Big| \to \left|\int\limits_\Gamma f(z)\,dz\right|, \quad |T| \to 0,$$

а следовательно:

$$\sum_{j=1}^{n}\Big|f\big(\xi_j\big)\Big|\Big|\Delta Z_j\Big| \to \int\limits_\Gamma \big|f(z)\big|\big|dz\big|, \quad |T| \to 0,$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 3.4. Пусть есть кусочно-гладкая кривая:

$$\Gamma = \gamma\Big(\big[t_0, t_1\big]\Big),$$

где γ — непрерывное отображение:

$$\gamma: \ \big[t_0, t_1\big] \to \mathbb{C}.$$

Пусть есть непрерывная на γ функция f.

Пусть имеется **допустимая замена параметра**, сохраняющая направление обхода кривой:

$$\gamma_1: \ \big[t_0', t_1'\big] \to \mathbb{C},$$

то есть:
$$\alpha: \ [t_0', t_1'] \to [t_0, t_1], \quad \alpha \in \mathbb{C}^1\Big([t_0', t_1']\Big),$$
и α — строго возрастает.

Значит:
$$\gamma_1\big(\alpha(t)\big) = \gamma(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

В этом случае не изменяется интеграл:
$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz.$$

Если же параметризация направления обхода такова, что допустимая замена параметра:
$$\gamma_2: \ [t_0'', t_1''] \to \mathbb{C}$$
меняет направление обхода кривой, то есть:
$$\beta: \ [t_0'', t_1''] \to [t_0, t_1], \quad \beta \in \mathbb{C}^1\Big([t_0'', t_1'']\Big),$$
и β — строго убывает.

Значит:
$$\gamma_2\big(\beta(t)\big) = \gamma(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

В таком случае интеграл меняет знак:
$$\int\limits_{\Gamma^-} f(z)\, dz = -\int\limits_{\Gamma^+} f(z)\, dz.$$

Пример 3.1. Посчитать интеграл:
$$I_n = \int\limits_{C_R^+(a)} (z-a)^n\, dz, \quad n \in \mathbb{N},$$
где:
$$C_R(a) = \Big\{z: \ \big|z-a\big| = R\Big\}$$
является положительно ориентированной окружностью с центром в точке a и радиусом R (см. рис. 3.5).

Решение: используется утверждение 3.2. Выбираем параметризацию:
$$\gamma(t) = a + R\,\mathrm{e}^{it}, \quad t \in [-, 2\pi].$$

Посчитаем производную:
$$\gamma'(t) = R \cdot i\,\mathrm{e}^{it}\ dt.$$

Тогда подставим (по утверждению 3.2):
$$I_n = \int \Big(a + R\,\mathrm{e}^{it} - a\Big)^n \cdot R \cdot i\,\mathrm{e}^{it}\ dt = \int\limits_0^{(} 2\pi) R^{n+1}\,\mathrm{e}^{it(n+1)}\, i\, dt =$$
$$= R^{n+1} \cdot i \int\limits_0^{2\pi} \Big(\cos(n+1)t + i\sin(n+1)t\Big)\, dt = \begin{bmatrix} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1, \end{bmatrix}$$
так как функции $\cos(n+1)t$ и $\sin(n+1)t$ проходят полный период.

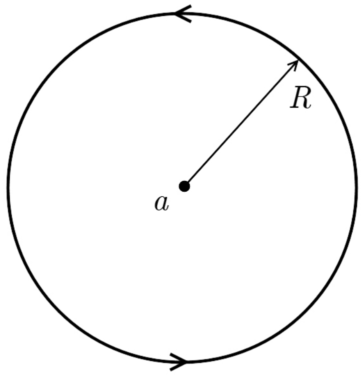

Рис. 3.5.

3.2. Теорема Коши

Теорема 3.1 (Коши). *Пусть Γ — простая кусочно-гладкая замкнутая кривая в $\mathbb{C}$ (см. рис. 3.6). Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$ с границей Γ. Пусть также функция:*

$$f \in \mathbb{C}^1(G), \quad f \in \mathbb{C}(\overline{G}).$$

Тогда:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

□ В доказательстве используются условия Коши – Римана и формула Грина из курса математического анализа.

Запишем:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_\Gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\Gamma (v\,dx + u\,dy).$$

Введем обозначения:

$$I_1 = \int_\Gamma (u\,dx - v\,dy), \quad I_2 = \int_\Gamma (v\,dx + u\,dy).$$

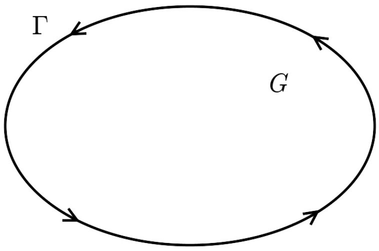

Рис. 3.6.

Воспользуемся формулой Грина (ориентируем согласно рисунку 3.6):

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_G (Q_x - P_y)\,dx\,dy, \quad P, Q \in \mathbb{C}^1, \quad P, Q \in \mathbb{C}(\overline{G}).$$

Посчитаем тогда:

$$I_1 = \int_\Gamma (u\,dx - v\,dy) = \iint_G \Big((-v_x) - u_y\Big)\,dx\,dy = 0,$$

так как для функций u и v выполняются условия Коши – Римана в области G:

$$u_y = -v_x.$$

Аналогично доказывается, что $I_2 = 0$. Теорема доказана. ■

3.3. Обобщенная теорема Коши

Определение 3.9. Пусть G — область в $\mathbb{C}$, граница которой ∂G состоит из конечного числа гладких кривых:

$$\partial G = \bigcup_{j=1}^{k} \Gamma_j,$$

где Γ_j — гладкие кривые, причем Γ_j и Γ_l при $j \neq l$ могут иметь общими только концевые точки.

Тогда G — область с **кусочно-гладкой границей**.

Заметим, что в ситуации из определения 3.9 кривые Γ_j могут быть двух видов:

1) Γ_j — **правильная** гладкая компонента границы ∂G, если:

$$\forall z < \dot{\Gamma}_j,\ \forall \varepsilon > 0 \text{ в } B_\varepsilon(z) \text{ найдутся точки из } G \text{ и точки из } \mathbb{C} \setminus \big(\partial G\big),$$

где $\dot{\Gamma}_j$ является кривой без концевых точек.
На рисунке 3.7 — это кривые Γ_1, Γ_2 и Γ_3.

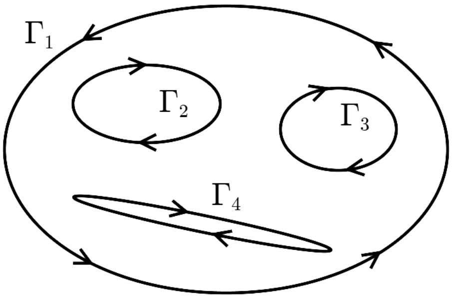

Рис. 3.7.

2) Γ_l — **разрез** в области G, если:

$$\forall z \in \dot{\Gamma}_l\ \exists \varepsilon > 0 :\ B_\varepsilon(z) \subset G \setminus \big(\partial G\big).$$

На рисунке 3.7 — это кривая Γ_4.

Будем считать, что граница $\big(\partial G\big)^+$ — **положительно ориентирована** относительно G, если при обходе границы область G остается справа (как показано на рисунке 3.7).

При этом будем считать, что разрезы проходятся дважды — сначала в одну сторону, затем — в противоположную.

Если функция $f \in \mathbb{C}^1(G)$ будет по непрерывности продолжаться на G, то не исключаем, что на разрезы f можно продолжать по-разному, то есть пределы с разных сторон разреза могут отличаться.

Теорема 3.2 (**Теорема Коши для произвольной ограниченной области**). *Пусть G — ограниченная область с гладкой границей. Пусть функция:*

$$f \in \mathbb{C}^1(G), \quad f \in \mathbb{C}(\overline{G}).$$

Тогда:

$$\int\limits_{(\partial G)^+} f(z)\, dz = 0.$$

☐ Идея доказательства — разбиваем область G на области из теоремы 3.1 и применяем эту теорему к получившимся областям.

Разбиваем область G на ограниченные области конечным числом разрезов (как показано на рисунке 3.8) $R_1, \ldots, R_k$, где:

$$r :\ \big[t_0, t_1\big] \to \mathbb{C}, \quad r\Big(\big[t_0, t_1\big]\Big) \subset G, \quad R = r\Big(\big[t_0, t_1\big]\Big).$$

Получились ограниченные области $G_1, \ldots, G_l$, у каждой из которых — простая замкнутая кусочно-гладкая граница.

Тогда по теореме Коши:

$$\sum_{j=1}^{l} \int\limits_{(\partial G)^+} f(z)\,dz = 0,$$

так как каждый интеграл из суммы равен нулю.

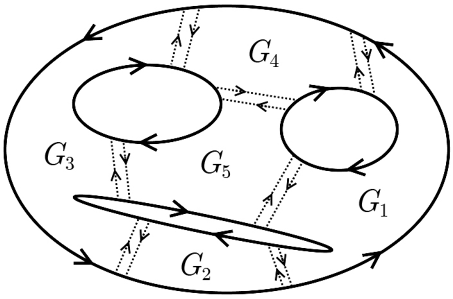

Рис. 3.8.

Распишем эту сумму:

$$\sum_{j=1}^{l} \int\limits_{(\partial G)^+} f(z)\,dz = \int\limits_{(\partial G)^+} f(z)\,dz + \sum\left(\int\limits_{R_S^+} f(z)\,dz + \int\limits_{R_s^-} f(z)\,dz\right).$$

По свойствам интегралов:

$$\int\limits_{R_S^+} f(z)\,dz + \int\limits_{R_s^-} f(z)\,dz = 0,$$

а значит:

$$\int\limits_{(\partial G)^+} f(z)\,dz = 0,$$

что и требовалось доказать. ■