ЛЕКЦИЯ 14

Конформные отображения

14.1. Принцип сохранения области

Теорема 14.1 (Принцип сохранения области). *Пусть G — область в $\mathbb{C}$, функция $f \in C^1(G)$ и пусть $f \neq \text{const}$. Тогда $f(G)$ — область.*

Лемма 14.1 (Об открытости). *Пусть функция f регулярна в точке z_0, т. е.*

$$\exists \delta > 0 : f \in C^1(B_\delta(z_0))$$

и пусть

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad \text{но } f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Тогда

$$\exists \delta > 0, \quad \exists \varepsilon > 0 : \forall w \in \dot{B}_\varepsilon(w_0)$$

найдутся ровно n различных прообразов при отображении f в $B_\delta(z_0)$, где $w_0 = f(z_0)$.

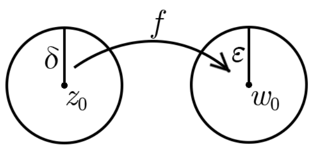

Рис. 14.1.

□ Для доказательства используется теорема об обратной функции.

Из условия: точка z_0 — нуль порядка n для функции

$$f(z) - f(z_0) \quad \Rightarrow \quad f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^n \cdot h(z),$$

где h регулярна в z_0, $h(z_0) \neq 0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию: $\sqrt[n]{h(z)}$ (многозначная функция). Т. к. h регулярна в z_0 и $h(z_0) \neq 0$, то $\exists \delta > 0$ такое, что в $B_\delta(z_0)$ можно выделить n регулярных ветвей $\sqrt[n]{h}$, пусть g_0 — одна из этих регулярных ветвей.

Рассмотрим в $B_\delta(z_0)$ функцию

$$\xi(z) \equiv (z - z_0) \cdot g_0(z).$$

Заметим, что $\xi \in C^1(B_\delta(z_0))$, причем

$$\xi'(z_0) = (1 \cdot g(z) + (z - z_0) \cdot g'(z))_{z=z_0} = g(z_0) \neq 0.$$

Тогда по теореме об обратной функции для функции $\xi(z) : \exists \sigma > 0 :$ в $B_\sigma(0)$ (т. к. $\xi(z_0) = 0$) можно рассмотреть обратную функцию к $\xi(z)$, которая отображает $B_\sigma(0)$ в $B_\delta(z_0)$, т. е. $\forall$ точки $\xi \in B_\sigma(0)$ есть ровно один прообраз в $B_\delta(z_0)$.

Рассмотрим в $B_\sigma(0)$ функцию $w(\xi) = \xi^n$. Заметим, что $w(B_\sigma(0)) = B_{\sigma^n}(0)$.

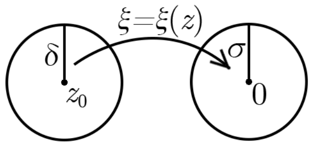

Рис. 14.2.

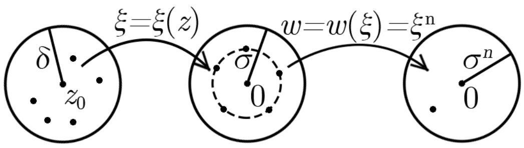

Рис. 14.3.

Заметим, что при отображении $w = w(\xi)$ у каждой точки $w \in B_{\sigma^n}(0)$ есть ровно n прообразов в $B_\sigma(0)$. Тогда для функции $w(z) = w(\xi(z))$для каждого $w \in B_{\sigma^n}(0)$ ровно n прообразов в первоначальном уровне $B_\delta(z_0)$. Но замечаем, что

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^n \cdot h(z) = ((z - z_0) \cdot g_0(z))^n = (\xi(z))^n = w(\xi(z))^n.$$

Получается, что

$$f(z) = f(z_0) + w(\xi(z))^n,$$

т. е. если взять $\varepsilon = \sigma^n$, то лемма будет выполнена. ■

Замечание 14.1 (Однолистность в малом). $f'(z_0) \neq 0 \iff f$ взаимно однозначна в некоторой окрестности z_0 (если производная регулярной функции в точке не равна нулю, то функция локально взаимно однозначно, а если равна нулю, то не является взаимооднозначной), т. е. f однолистна в малом, т. е. локально однолистна.

Пример 14.1.

$$f(z) = \mathrm{e}^z, \qquad f'(z) = \mathrm{e}^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

но

$$\mathrm{e}^{z+2\pi ki} = \mathrm{e}^z,$$

т. е. f не является взаимно однозначной в любой области, содержащей две разные точки z_1 и $z_1 + 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. условие

$$f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$$

не гарантирует взаимно-однозначности f в G (однолистность в большом).

□ Для доказательства используется лемма 14.1 и сохранение связности при непрерывном отображении.

1) Докажем, что $f(G)$ — открыто (если G — область). Рассмотрим произвольную точку $w_0 \in f(G)$. Тогда

$$\exists z_0 \in G : f(z_0) = w_0.$$

Т. к. по условию $f \neq \mathrm{const}$, то

$$\exists n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_0) \neq 0,$$

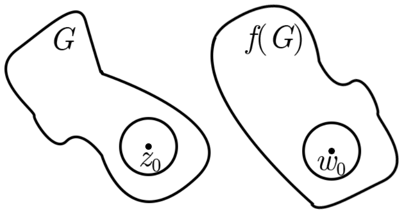

Рис. 14.4.

при условии, что

$$f^{'}(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0,$$

но не исключено, что $n = 1$. Тогда по лемме 14.1

$$\exists \delta > 0, \quad \exists \varepsilon > 0 : \forall w \in \dot{B}_\varepsilon(w_0)$$

найдётся ровно n прообразов $B_\delta(z_0)$ Без ограничения общности рассуждений можем считать, что

$$B_\delta(z_0) \subset G \quad \Rightarrow \quad B_\varepsilon(w_0) \subset f(G).$$

В силу произвольности выбора $w_0 f(G)$ открыто.

2) Т. к. G — связно, т. е. $\forall z_1, z_2 \in G \quad \exists$ кривая Γ, соединяющая z_1 и z_2 внутри G. Тогда $f(G)$ — кривая, соединяющая

$$w_1 = f(z_1), \qquad w_2 = f(z_2)$$

внутри $f(G)$. Так как для любых $w_1, w_2 \in f(G)$ найдутся прообразы $z_1, z_2 \in G$, то $f(G)$ связно.

■

Следствие 14.1 (Принцип максимума модуля)**.** *Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$, функция $f \in C^1(G)$, $f \in C(\overline{G})$, причем $f \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда $\sup_{z\in\overline{G}} |f(z)|$ достигается строго на границе G.*

□ Для доказательства используется принцип сохранения области в доказательстве от противного.

Пусть

$$\exists z_0 \in G : |f(z_0)| = \sup_{z\in\overline{G}} |f(z)|.$$

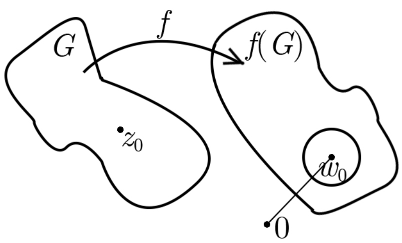

Рис. 14.5.

Т. к. по теореме 1 $f(G)$ — область, то $w_0 = f(z_0)$ — внутренняя точка $f(G)$. Т. е.

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(w_0) \subset f(G).$$

Тогда в $B_\varepsilon(w_0)$ можно найти точку w, которая удалена от точки на 0 на большее расстояние, чем w_0 (например, на луче из 0 к w_0, если $w_0 \neq 0$). Т. к.

$$\exists z \in G : f(z) = w,$$

то

$$|f(z)| = |w| > |w_0| = |f(z_0)|,$$

что противоречит тому, что

$$|f(z_0)| = \sup_{z \in \overline{G}} |f(z)|.$$

Полученное противоречие доказывает средствие 1 (т. к. $\sup_{z\in\overline{G}} |f(z)|$ точно где-то достигается, т. к. $\overline{G}$ — компакт). Полученное противоречие доказывает средствие 1 (т. к. $\sup_{z\in\overline{G}} |f(z)|$ точно где-то достигается, т. к. $\overline{G}$ — компакт). ■

Следствие 14.2 (Принцип максимума и минимума гармонической функции)**.** *Пусть G — ограниченная область из $\mathbb{R}^2$, пусть u — гармоническая функция в G, т. е.*

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

причем $u \in C(\overline{G})$, $u \neq \mathrm{const}$. Тогда $\sup_{(x,y)\in\overline{G}} u(x, y)$ и $\inf_{(x,y)\in G} u(x, y)$ достигаются строго на границе G.

□ Для доказательства используется теорема 14.1, доказательство от противного и связь регулярной функции с гармоническими.

Докажем для sup (для inf аналогично). Предположим противное:

$$\exists (x_0, y_0) \in G : u(x_0, y_0) = \sup_{(x,y)\in\overline{G}} u(x, y).$$

Т. к. G — область, то

$$\exists \delta > 0 : B_\delta((x_0, y_0)) \subset G$$

— круг (односвязная область). Следовательно, по теореме о восстановлении регулярной функции по гармонической (по действительной части) существует функция $f \in C^1(B_\delta(z_0))$, где $z_0 = x_0 + iy_0$ такая, что $u = \operatorname{Re} f$ в $B_\delta(z_0)$.

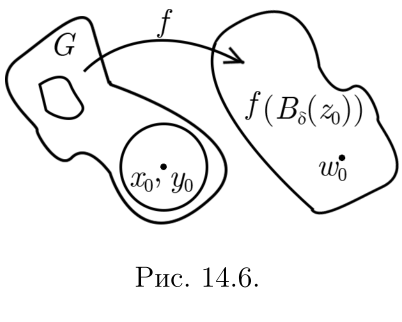

Рис. 14.6.

Т. к. $u \neq \mathrm{const}$, то $f \neq \mathrm{const}$. Тогда по теореме 14.1 для f и для области $B_\delta(z_0)$ верно: $f(B_\delta(z_0))$ — область, т. е. $w_0 = f(z_0)$ — область, т. е.

$$\exists \varepsilon > 0 B_\varepsilon(w_0) \subset f(B_\delta(z_0)).$$

Значит, существует точка

$$w' \in B_\varepsilon(w_0) : \operatorname{Re} w' > \operatorname{Re} w_0.$$

Т. к. $w' \in B_\varepsilon(w_0)$, то $\exists z' \in B_\delta(z_0) : f(z') = w'$. Если $z' = x' + iy'$, то получается, что

$$u(x_0, y_0) = \operatorname{Re} w_0 < \operatorname{Re} w' = u(x', y'),$$

что противоречит тому, что

$$u(x_0, y_0) = \sup_{(x,y)\in\overline{G}} u(x, y),$$

т. к. $B_\delta(z_0) \subset G$). Следовательно, $\sup u$ в $\overline{G}$ достигается на границе G (достигается, т. к. $\overline{G}$ — компакт).

Аналогично для inf. ■

14.2. Геометрический смысл $|f'(z)|$ и $\arg_{\text{гл}} f'(z)$

Пусть $f \in C^1(B_\delta(z_0))$, где $z \in \mathbb{Z}$, $\delta > 0$, причём

$$f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in B_\delta(z_0).$$

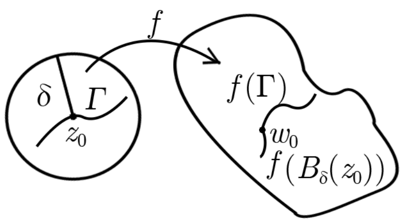

Рис. 14.7.

Пусть Γ — гладкая кривая в $B_\delta(z_0)$, проходящая через z_0. Пусть

$$\gamma : [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \to \mathbb{C}$$

— допустимая параметризация Γ, т. е.

$$\gamma \in C^1([t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]), \quad \gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma], \quad \gamma(t_0) = z_0.$$

Тогда $w(t) \equiv f(\gamma(t))$ — параметризация множества $f(\gamma)$, причём

$$w'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma], \tag{14.1}$$

т. к. $f' \neq 0$ и $\gamma' \neq 0$, т. е. $f(\Gamma)$ — гладкая кривая, проходящая через w_0. Из (14.1) для $t = t_0$ получаем:

$$|w'(t_0)| = |f'(\gamma(t_0))| \cdot |\gamma'(t_0)|,$$

т. е.

$$\frac{|w'(t_0)|}{|\gamma'(t_0|} = |f'(z_0)|,$$

т. е. геометрический смысл $|f'(z_0)|$ — это коэффициент растяжения (локального) всех гладких кривых в точке z_0 при отображении f. Из (14.1) для $t = t_0$ также можно получить связь между углами:

$$\operatorname{Arg} w'(t_0) = \arg_{\text{гл}} f'(z_0) + \operatorname{Arg} \gamma'(t_0),$$

т. е.

$$\operatorname{Arg} w'(t_0) - \operatorname{Arg} \gamma'(t_0) = \arg_{\text{гл}} f'(z_0),$$

т. к. правая часть не зависит от кривой, то из этого следует, что любая гладкая кривая, проходящая через z_0, будет поворачиваться на один и тот же угол, т. е. геометрический смысл $\arg_{\text{гл}} f'(z_0)$ — угол поворота вокруг z_0 всех гладких кривых при отображении f. Отсюда, в частности, следует, что при отображении f угол между любыми гладкими кривыми в точке z_0 сохраняется.

Пример 14.2. Длина кривой

$$\ell(\Gamma) = \int\limits_{[t_0-\sigma, t_0+\sigma]} |\gamma'(t)| dt.$$

Для образа

$$\ell(f(\Gamma)) \int\limits_{[t_0-\sigma, t_0+\sigma]} |w'(t)| dt = \int\limits_{[t_0-\sigma, t_0+\sigma]} |f'(z(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt.$$

Таким образом, дифференцируемая функция близка к суперпозиции поворота и растяжения.

14.3. Конформные отображения

Определение 14.1 (Конформное отображение)**.** Пусть отображение

$$f : B_\delta(z_0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

причем u, v дифференцируемы в точке (x_0, y_0), где $z_0 = x_0 + iy_0$. Кроме того линейное отображение, заданное

$$\begin{cases} du = u'_x(x_0, y_0)dx + u'_y(x_0, y_0)dy, \\ dv = v'_x(x_0, y_0)dx + v'_y(x_0, y_0)dy. \end{cases}$$

и переводящее (dx, dy) в (du, dv), является суперпозицией поворота $\mathbb{R}^2$ вокруг нуля и растяжения (гомотетии) $\mathbb{R}^2$ с центром 0. Тогда **отображение f конформно в точке z_0** (Таким образом, отсечены отражения и растяжения, растягивающие в разных направлениях по-разному).

Теорема 14.2 (Критерий конформности в точке)**.** $\exists f'(z_0) \neq 0 \iff f$ *— конформна в z_0 в смысле определения 14.1.*

□ Для доказательства используются условия Коши – Римана.

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $\exists f'(z_0) \neq 0$, тогда u, v дифференцируемы в точке (x_0, y_0). Значит можно рассмотреть линейное отображение в точке (x_0, y_0):

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} =$$

$$= \Big| K = |f'(z_0)| \neq 0 \Big| = K \begin{pmatrix} \frac{u_x}{K} & -\frac{v_x}{K} \\ \frac{v_x}{K} & \frac{u_x}{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \ominus$$

Введём дополнительный угол φ. Т. к. $\left(\frac{u_x}{K}\right)^2 + \left(\frac{v_x}{K}\right)^2 = 1$, то $\exists\varphi$:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{u_x}{K}, \\ \sin\varphi = \frac{v_x}{K}. \end{cases}$$

$$\ominus\, K \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

— растяжение и поворот.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть выполнено определение 14.1, т. е.

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

т. е. из определения 14.1 u, v — дифференцируемы в (x_0, y_0). Тогда

$$u_x = K\cos\varphi, \qquad u_y = -K\sin\varphi, \qquad v_x = K\sin\varphi, \qquad v_y = K\cos\varphi, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

Т. е. выполнены условия Коши–Римана в точке z_0, а значит $\exists f'(z_0)$. Считаем

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) : |f'(z_0)| = \sqrt{u_x^2 + v_x^2} = \sqrt{K^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = K \neq 0,$$

где K — по условию, коэффициент растяжения в определении 14.1, $K \neq 0$. ■

Введем понятие конформности в точке ∞.

14.4. НЛО (угол между кривыми в точке ∞)

Сфера Римана — отображение некоторой сферы, касающейся комплексной плоскости в нуле.

Берётся точка N, противоположная 0, проводится луч из N на $\mathbb{C}$. Пересечение луча со сферой M переходит в пересечение луча с $\mathbb{C}$. $f(M)$ — стереографическая проекция. Окрестность N отображается в окрестность бесконечности. Это отображение сохраняет углы между кривыми на сфере и их образами в $\mathbb{C}$, тогда кривые в точке ∞ пересекаются под тем же углом, что и их прообразы в точке N.

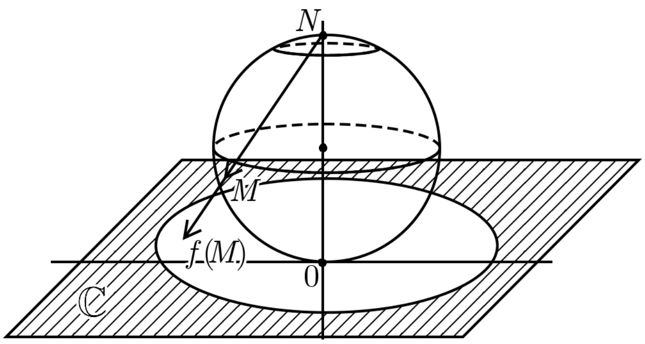

Рис. 14.8.

Вариант рассматривания кривых в бесконечности без сферы Римана: рассмотрим отображение $\frac{1}{z}$. Для сферы Римана это отображение есть поворот на π, на плоскости это более сложное отображение. Тогда прообразы кривых на бесконечности окажутся в нуле.

Определение 14.2 (Конформность в ∞)**.** Пусть ∞ — устранимая особая точка функции f. Тогда f **конформна в точке** ∞, если функция $g(\xi) = f(\frac{1}{\xi})$ при её непрерывном продолжении в точку $\xi_0 = 0$ будет конформно в точке $\xi_0 = 0$.

Определение 14.3 (Конформность неустранимой особой точки)**.** Пусть $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ является изолированной особой точкой f, но не является устранимой особой точкой. Тогда f **конформна в** z_0, если $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ после доопределения по непрерывности в z_0 конформна в z_0.

Заметим, что в условии определения (14.3) z_0 — это полюс первого порядка f, если z_0 — существенно особая точка, то

$$\nexists \lim_{z \to z_0} f(z) \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)}.$$

Нельзя g доопределить в z_0. Если z_0 — полюс порядка $n \geqslant 2$, то

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^n} \quad \Rightarrow \quad g(z) = \frac{(z - z_0)^n}{h(z)}, \quad g'(z_0) = 0,$$

т. е. нет конформности в точке z_0.

Определение 14.4 (Конформность в области)**.** Функция f осуществляет **конформное отображение в области** $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ (не исключено, что $\infty \in G$, но тогда $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\infty) \subset G$), если

1) f конформна в $\forall z \in G$.
2) f взаимооднозначна в G.