ЛЕКЦИЯ 17

Принцип симметрии. Классическая задача Дирихле

17.1. Принцип соответствия границ. Принцип симметрии

Теорема 17.1 (Принцип соответствия границ (без доказательства)). *Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$. Граница ∂G — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая (т. е. G — односвязная область). Пусть f — конформное отображение G на единичный круг $\{|\omega| < 1\}$. Тогда f можно непрерывно продолжить в $\overline{G}$ (т. е. будет отображаться не только область, а ещё и граница), причём так, что ∂G непрерывно и взаимно однозначно отображается функцией f на $\{|\omega| = 1\}$ так, что сохраняется положительная ориентация относительно $\{|\omega| < 1\}$.*

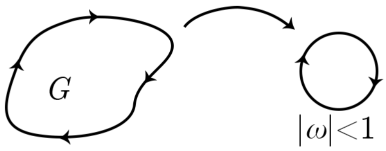

Рис. 17.1.

Такая ситуация реализуется только на ограниченных односвязных областях.

Теорема 17.2 (Принцип симметрии). *Пусть область G лежит в верхней полуплоскости: $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. Причём граница ∂G — кусочно-гладкая кривая и содержит $l_1, \ldots, l_k$ — конечное число интервалов на оси $\mathbb{R}$. Функция f конформно отображает G на $\widetilde{G} \subset \{\operatorname{Im} \omega > 0\}$. f можно непрерывно и взаимно однозначно продолжить на $l_1, \ldots, l_k$ так, что $f(l_j) = \widetilde{l}_j$, где $\widetilde{l}_1, \ldots, \widetilde{l}_k$ конечное число интервалов на оси $\mathbb{R}$ принадлежащие $\partial\widetilde{G}$.*

Пусть G^* — область, симметричная G относительно оси $\mathbb{R}$, а $\widetilde{G}^*$ — область, симметричная $\widetilde{G}$ относительно $\mathbb{R}$. Тогда функция

$$\mathcal{F}(z) = \begin{cases} f(z), & \text{если } z \in G \cup (l_1 \cup \cdots \cup l_k), \\ \overline{f(\overline{z})}, & \text{если } z \in G^*, \end{cases}$$

конформно отображает область $G \cup (l_1 \cup \cdots \cup l_k) \cup G^*$ на $\widetilde{G} \cup (\widetilde{l}_1 \cup \cdots \cup \widetilde{l}_k) \cup \widetilde{G}^*$.

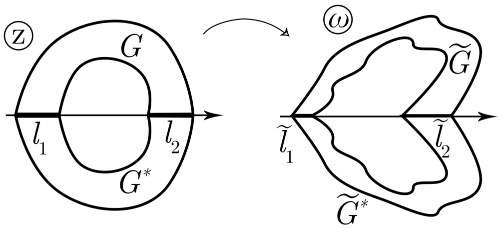

Рис. 17.2.

Для доказательства теоремы (17.2) потребуется несколько утверждений о первообразных регулярных функциях.

1) G — область в $\mathbb{C}$. Функция F — первообразная f в G, если

$$F'(z) = f(z), \quad \forall z \in G.$$

2) Если F_1, F_2 — две первообразные f в области G, то

$$F_2(z) = F_1(z) + C, \quad \forall z \in G, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Теорема 17.3 (о существовании первообразной). *Если в области G функция f непрерывна, причём*

$$\int\limits_{\Gamma} f(\xi)\, d\xi = 0, \quad \forall \Gamma \subseteq G,$$

где Γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая. Тогда

$$\exists F(z) = \int\limits_{\Gamma_{a,z}} f(\xi)\, d\xi,$$

одна из первообразных для f (где $a \in G$ — фиксированная начальная точка, $\Gamma_{a,z}$ — кусочно-гладкая кривая от a до z внутри G).

Также понадобятся ещё несколько простых теорем.

Теорема 17.4 (Морера). *Пусть G — односвязная область в $\mathbb{C}$, f — непрерывная в G функция, причём*

$$\int\limits_{\Delta} f(\xi)\, d\xi = 0, \quad \forall \Delta,$$

где Δ — треугольная замкнутая кривая в G.

Тогда f имеет в области G первообразную.

□ 1) Заметим, что из условия теоремы Морера следует, что интеграл по любой конечнозвенной ломаной равен нулю, поскольку для любой ломаной возможно разбиение многоугольника, ею ограниченной, на треугольники.

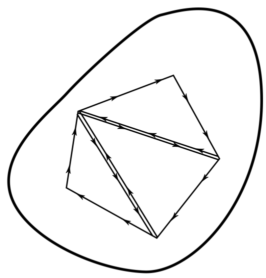

Рис. 17.3.

$$\int\limits_{\Lambda} f(\xi)\, d\xi = 0, \quad \forall \Lambda,$$

где Λ — замкнутая ломаная в G.

Таким образом ситуацию с ломаными можно свести к ситуации с треугольниками, проведя диагонали из одной вершины. Интегралы по этим треугольникам будут равны нулю. После складывания интегралов по треугольникам останется только интеграл по ломаной, потому что интегралы по диагоналям сократятся, т. к. интегрируется по ним дважды (в прямом и обратном направлении).

2) Рассмотрим функцию $F(z)$ для фиксированной точки $a \in G$.

$$F(z) = \int\limits_{\Lambda_{a,z}} f(\xi)\, d\xi,$$

где $\Lambda_{a,z}$ — произвольная ломаная в G от a до z.

Т. к. $\int\limits_{\Lambda} f(\xi)\, d\xi = 0$, $\forall \Lambda$ — замкнутой, то $F(z)$ — не зависит от выбора $\Lambda_{a,z}$. Для

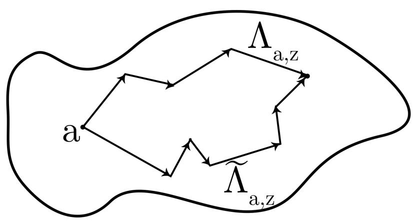

Рис. 17.4.

произвольной точки $z \in G$ рассмотрим круг $B_r(z) \subset G$ и рассмотрим

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z}, \quad \forall \Delta z : |\Delta z| > r.$$

Рассмотрим произвольную ломаную от a к z: $\Lambda_{a,z}$.

Для $\Delta z : |\Delta z| < r$ рассмотрим ломаную $\Lambda_{a,z+\Delta z} = \Lambda_{a,z} \cup [z; z+\Delta z]$.

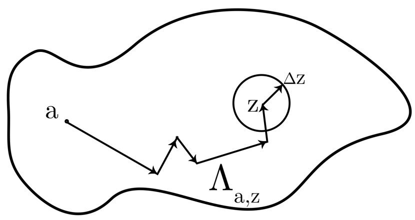

Рис. 17.5.

Таким образом,

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int\limits_{\Lambda_{a,z+\Delta z}} f(\xi)\, d\xi - \int\limits_{\Lambda_{a,z}} f(\xi)\, d\xi = \int\limits_{[z;z+\Delta z]} f(\xi)\, d\xi$$

Тогда

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z} \int\limits_{[z;z+\Delta z]} f(\xi)\, d\xi - f(z)\right| \ominus \tag{17.1}$$

Представим $f(z)$ в виде интеграла:

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int\limits_{[z;z+\Delta z]} f(z)\, d\xi.$$

Это верно, т. к.:

$$\xi(t) = z + t \cdot \Delta z, \quad t \in [0;1],$$
$$d\xi = \Delta z\, dt.$$

Следовательно:

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int\limits_0^1 f(z)\Delta z\, dt = f(z) \int\limits_0^1 dt = f(t).$$

Таким образом, равенство (17.1) продолжится:

$$\ominus \left| \frac{1}{\Delta z} \int\limits_{[z;z+\Delta z]} (f(\xi) - f(z))\, d\xi \right| \leqslant \frac{1}{|\Delta z|} \int\limits_{[z;z+\Delta z]} |f(\xi) - f(z)||d\xi| \leqslant$$

Т. к. f — непрерывна в точке z, то

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \forall \xi > 0 : |\xi - z| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(\xi) - f(z)| < \varepsilon.$$

Можно считать, что $\delta \leqslant r$.

$$\leqslant \frac{1}{|\Delta|} \int\limits_{[z;z+\Delta z]} \varepsilon |d\xi| = \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \cdot \Delta z = \varepsilon.$$

Значит

$$\exists \lim \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z),$$

$\Rightarrow \quad F$ — первообразная f в G. ■

Замечание. 1) Из теоремы Мореры следует, что при её условиях: $f \in C^1(G)$. Т. к. есть первообразная F и $F' = f$ — непрерывна в G.

$$\Rightarrow \quad F \in C^1(G) \quad \Rightarrow \quad F \in C^\infty(G),$$

т. е., в частности, $f \in C^1(G)$.

Теорема 17.5 (о стирании разреза)**.** *Пусть G — ограниченная односвязная область, причём существует интервал $(A;B)$, где $A, B \in \partial G$ и разбивают G на две ограниченные односвязные области G_1 и G_2.*

Пусть функция $f_k (k = 1,2)$ регулярна в области G_k и непрерывна в $G_k \cup (A;B)$, причём $f_1(z) = f_2(z)$ для $\forall z \in (A;B)$.

Тогда

$$\mathcal{F}(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1 \cup (A;B), \\ f_2(z), & z \in G_2. \end{cases}$$

регулярна в G.

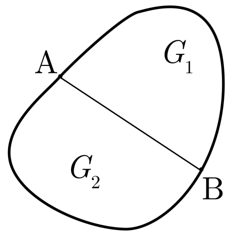

Рис. 17.6.

□ Если для $\mathcal{F} \in G$ выполнены условия теоремы Морера, то из замечания из теоремы следует, что $\mathcal{F} \in C^1(G)$. G — односвязная, $\mathcal{F}$ — непрерывна в G.

Рассмотрим треугольник в G (т. е. замкнутую треугольную ломаную). Возможны 3 случая:

1) $\Delta \subset G_1 \cup (A; B)$;
2) $\Delta \subset G_2 \cup (A; B)$;
3) Δ пересекается с G_1 и G_2.

В случае (1), внутри треугольника f_1 регулярна и непрерывно продолжается на границу. Следовательно,

$$\int\limits_{\Delta} f_1(z)\, dz = \int\limits_{\Delta} \mathcal{F}(z)\, dz = 0 \quad \text{(по теореме Коши)}.$$

В случае (2) — аналогично.

В случае (3), треугольник разбивается интервалом $(A; B)$ на две ломаные, одна из которых лежит в $G_1 \cup (A; B)$, а другая в $G_2 \cup (A; B)$. Следовательно, интеграл от f по каждой из этих ломаных равен нулю. Складывая интегралы по этим ломаным,

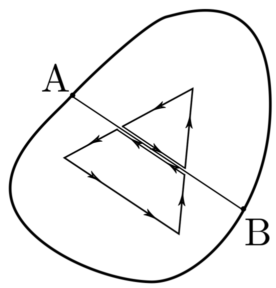

Рис. 17.7.

получаем, что интеграл

$$\int\limits_{\Delta} \mathcal{F}\, dz = 0.$$

Следовательно, по замечанию к теореме Морера, $\mathcal{F} \in C^1(G)$. ■

Теорема 17.6. *(Формула Ньютона – Лейбница) Пусть G — область в $\mathbb{C}$, функция $f \in C^1(G)$ и F — первообразная f в G. Тогда для любых точек $a, b \in G$ и любой кусочно-гладкой кривой $\Gamma_{a,b}$ от a к b верно следующее:*

$$\int\limits_{\Gamma_{a,b}} f(\xi)\, d\xi = F(b) - F(a).$$

□ Используем теорему о существовании первообразной.

1) Пусть G — односвязная область, тогда по теореме Коши $\forall\Gamma$ — замкнутой кусочно-гладкой кривой в G

$$\int\limits_{\Gamma} f(\xi)\,d\xi = 0.$$

Тогда по теореме о существовании первообразной для f в G, если выбрать начальную точку $c \in G$, то

$$F_2(z) = \int\limits_{\Gamma_{c,z}} f(\xi)\,d\xi \text{ — первообразная } f.$$

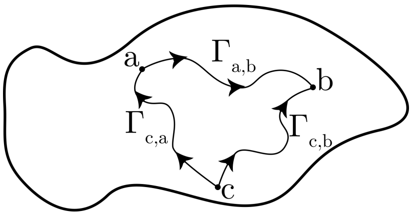

Рис. 17.8.

По теореме Коши для f в G:

$$\underbrace{\int\limits_{\Gamma_{c,a}} f(\xi)\,d\xi}_{F_2(a)} + \int\limits_{\Gamma_{a,b}} f(\xi)\,d\xi = \underbrace{\int\limits_{\Gamma_{c,b}} f(\xi)\,d\xi}_{F_2(b)}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\Gamma_{a,b}} f(\xi)\,d\xi = F_2(b) - F_2(a) = F(b) - F(a),$$

т. к. $F_2(z) = F(z) + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in G$. Формула Ньютона–Лейбница доказана для односвязной области.

2) Пусть G — произвольная область.

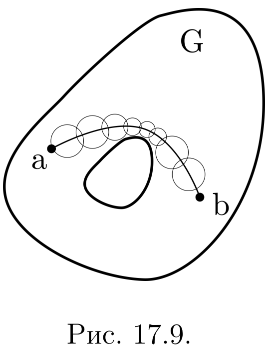

Рис. 17.9.

Т. к. $\Gamma_{a,b}$ — компакт, то можно выделить конечное число открытых кругов $B_1, \ldots, B_k$ так, что кривую Γ можно разбить на конечное число последовательных звеньев: $\Gamma_{\xi_0\xi_1}, \Gamma_{\xi_1\xi_2}, \ldots, \Gamma_{\xi_{k-1}\xi_k}$ $(a = \xi_0,\ b = \xi_k)$.

Т. к. круг — односвязная область, то по первой части доказательства:

$$\int\limits_{\Gamma_{\xi_{j-1}\xi_j}} f(\xi)\,d\xi = F(\xi_j) - F(\xi_{j-1}), \quad j = 1,\ldots,k.$$

Суммируя левые и правые части равенства по j от 1 до k, получаем:

$$\int\limits_{\Gamma_{\xi_0\xi_1}\cup\Gamma_{\xi_1\xi_2}\cup\cdots\cup\Gamma_{\xi_{k-1}\xi_k}} f(\xi)\,d\xi = \sum_{j=1}^{k}(F(\xi_j) - F(\xi_{j-1})) = F(\xi_k) - F(\xi_0) = F(b) - F(a). \quad \blacksquare$$

Используя эти теоремы, можно доказать принцип симметрии (теорему (17.2)).
$\square$ Используем теорему о стирании разреза.
Из условия теоремы (17.2): F регулярна в G и

$$F'(z) = f'(z) \neq 0, \quad \forall z \in G \text{ (т. к. } f \text{ — конформно в } G.)$$

Рассмотрим точку $z \in G^*$, и вычисляем $\mathcal{F}'(z)$:

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{f(\overline{z+\Delta z})} - \overline{f(\overline{z})}}{\Delta z} = \overline{\left(\frac{f(\overline{z}+\overline{\Delta z}) - f(\overline{z})}{\overline{\Delta z}}\right)} = \overline{f'(\overline{z})} \neq 0,$$

т. к. $\exists f'(\overline{z})$ для $\overline{z} \in G$ и $f'(z) \neq 0$ в G.
Таким образом, $\mathcal{F}$ конформна в G^*.
Докажем, что $\mathcal{F}$ непрерывна в произвольной точке $z_0 \in l_0 \cup l_1 \cup \cdots \cup l_k$.
По условию:

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in G}} \mathcal{F} = \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Значит,

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in G^*}} \mathcal{F} = \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in G^*\\ \overline{z}\in G}} \overline{f(\overline{z})} = \lim_{\substack{\overline{z}\to z_0\\ \overline{z}\in G}} \overline{f(\overline{z})} = \overline{f(z_0)}.$$

Но т. к. f отображает $l_1 \cup \cdots \cup l_k$ в $\mathbb{R}$, то $f(z_0) = \overline{f(z_0)}$, т. е. $\mathcal{F}$ непрерывна в z_0. По теореме (17.5) о стирании разреза, $\mathcal{F}$ регулярна в $G \cup l_1 \cup \cdots \cup l_k \cup G^*$ и взаимно однозначно отображает на $\widetilde{G} \cup \widetilde{l}_1 \cup \cdots \cup \widetilde{l}_k \cup \widetilde{G}^*$.

17.2. Классическая задача Дирихле

Классическая задача Дирихле для уравнения Лапласа.
G — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, ∂G — кусочно-гладкая кривая.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u\big|_{\partial G} = u_0(x,y). \end{cases} \tag{17.2}$$

u_0 — непрерывна на ∂G.
Ищем функцию u — гармоническую в G и непрерывную в замыкании: $u \in C(\overline{G})$.

Теорема 17.7 (единственность решения)**.** *В условиях классической задачи Дирихле для уравнения Лапласа решение ровно одно.*

☐ Используем принцип минимума и максимума для гармонической функции.

Пусть u_1 и u_2 — два решения задачи (17.2). Тогда $u_1 - u_2 = V$ — гармоническая в G, причём

$$V\big|_{\partial G} = u_1\big|_{\partial G} - u_2\big|_{\partial G} = u_0 - u_0 = 0.$$

По принципу минимума и максимума гармонической функции для ограниченной области G, получаем:

$$\min_{\overline{G}} V = \max_{\overline{G}} V = V\big|_{\partial G} = 0. \quad \blacksquare$$

Теорема 17.8. *Пусть G — область в $\mathbb{C}$. Функция u — гармоническая в G, и пусть есть область $D \subset \mathbb{C}$. Функция f конформно отображает D на G.*

Тогда функция $\widetilde{u}(\xi) = u(f(\xi))$ — гармоническая в D $(\xi \in G)$.

☐ Используем связь гармонических и регулярных функций.

Пусть ξ_0 — произвольная точка в D. Рассмотрим $B_r(\xi_0)$.

Т. к. круг — односвязная область, то $\widetilde{G} = f(B_r(\xi_0)) \subset G$ — односвязная область. Тогда по теореме о восстановлении регулярной функции по действительной части существует функция $g \in C^1(\widetilde{G})$ такая, что $u = \operatorname{Re} g$. Следовательно $h(\xi) = g(f(\xi))$ — регулярна в D $\forall \xi \in D$. Причём $\widetilde{u}(\xi) = g(u(\xi)) = \operatorname{Re} h \quad \Rightarrow \quad \widetilde{u}$ — гармоническая в $B_r(\xi)$. В силу произвольности выбора $\xi_0 \in D$ получаем, что $\widetilde{u}$ — гармоническая в D. $\blacksquare$

Теорема 17.9 (явный вид решения задачи Дирихле в единичном круге)**.** *Пусть u — гармоническая функция в $B_1(0)$, u_0 непрерывная на $\partial B_1(0)$ функция.*

Тогда $\forall z \in B_1(0)$, $z = r \cdot e^{i\varphi}$, $r \in [0;1]$, $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$u(r \cdot e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2} u_0(e^{i\theta})d\theta. \text{ (Интеграл Пуассона)}$$

Для доказательства теоремы (17.9) потребуется лемма:

Лемма 17.1 (теорема о среднем для гармонической функции)**.** *Пусть функция u — гармоническая в $G \subset \mathbb{R}^2$. Если $a \in G$ и $\overline{B_r(a)} \subset G$, то*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(a + r\,e^{i\varphi})d\varphi.$$

☐ Используем связь гармонических функций и интегральную формулу Коши.

Т. к. $B_r(a)$ — односвязная область, то $\exists f$ — регулярная в $B_r(a)$ и такая, что $u = \operatorname{Re} f$. А т. к. f регулярна в $B_r(a)$ и $f \in C(\overline{B_r(a)})$, то по интегральной формуле Коши $\forall z \in B_r(a)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial B_r(a)^+} \frac{f(\xi}{\xi - z}d\xi.$$

Пусть $z = a$, и, с учётом параметризации, $\xi(\varphi) = a + r\,e^{i\varphi}$ и $d\xi = ri\,e^{i\varphi}\,d\varphi$:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial B_r(a)^+} \frac{f(\xi}{\xi - a}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f(a + r\,e^{i\varphi})}{a + r\,e^{i\varphi} - a} ri\,e^{i\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(a + r\,e^{i\varphi})d\varphi$$

Т. к. $u = \operatorname{Re} f$, то

$$u(a) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(a + r\,\mathrm{e}^{i\varphi})\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(a + r\,\mathrm{e}^{i\varphi}) \quad \blacksquare$$

Замечание. Формула из теоремы о среднем верна и в случае, когда u — гармоническая в $B_r(a)$, а $u \in C(\overline{B_r(a)})$ (т. е. необязательно что бы круг с замыканием лежал в G), т. к. интеграл непрерывно зависит от r, как от параметра.

Используя лемму о среднем докажем теорему (17.9).

$\square$ $z_0 \in B_1(0)$ — произвольная точка в единичном круге. Пусть $z_0 = r_0\,\mathrm{e}^{i\varphi}$.

Найдётся конформное отображение g: $\xi = g(z)$ круга $\{|z| < 1\}$ на $\{|\xi| < 1\}$ такое, что $g(z_0) = 0$. Например,

$$\xi = g(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$$

Обратное отображение $z = g^{-1}(\xi)$ конформно отображает $\{|\xi| < 1\}$ на $\{|z| < 1\}$.

Тогда $\widetilde{u}(\xi) = u(g^{-1}(\xi))$ — гармоническая в $\{|\xi| < 1\}$. И по теореме о среднем:

$$u(z) = \widetilde{u}(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \widetilde{u}(\mathrm{e}^{i\psi})d\psi.$$

Заменим переменную:

$$\xi = g(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}.$$

Если $z \in \{|z| = 1\}$, тогда $\xi \in \{|\xi| = 1\}$ (по принципу соответствия границ).

Для ξ, лежащей на единичной окружности:

$$\xi = e^{i\varphi} = g(e^{i\theta}) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - z_0}{1 - \overline{z}_0\,\mathrm{e}^{i\theta}},$$

дифференцируем левую и правую части и выражаем $d\psi$.

$$i\,\mathrm{e}^{i\psi}\,d\psi = \frac{i\,\mathrm{e}^{i\theta}\,d\theta(1 - \overline{z}_0\,\mathrm{e}^{i\theta}) - (-\overline{z}_0 i\,\mathrm{e}^{i\theta}\,d\theta)(\mathrm{e}^{i\theta} - z_0)}{(1 - \overline{z}_0\,\mathrm{e}^{i\theta})^2},$$

$$\frac{\mathrm{e}^{i\theta} - z_0}{1 - \overline{z}_0\,\mathrm{e}^{i\theta}}d\psi = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}\,d\theta(1 - \overline{z}_0\,\mathrm{e}^{i\theta} + \overline{z}_0\,\mathrm{e}^{i\theta} - \overline{z}_0 z_0)}{(1 - \overline{z}_0\,\mathrm{e}^{i\theta})^2},$$

$$d\psi = \frac{1 - \overline{z}_0\,\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta} - z_0}\frac{(1 - r_0^2)e^{i\theta}}{(1 - \overline{z}_0\,\mathrm{e}^{i\theta})^2}d\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}(1 - r_0^2)d\theta}{(\mathrm{e}^{i\theta} - z_0)(1 - \overline{z}_0\,\mathrm{e}^{i\theta})} \ominus$$

Т. к. $z_0 = r_0\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ и $\overline{z}_0 z_0 = r_0^2$, то равенство продолжится:

$$\ominus \frac{(1 - r_0^2)d\theta}{(\mathrm{e}^{i\theta} - z_0)(\mathrm{e}^{-i\theta} - \overline{z}_0)} = \frac{(1 - r_0^2)d\theta}{1 - (z_0\,\mathrm{e}^{-i\theta} + \overline{z}_0\,\mathrm{e}^{i\theta}) + z_0\overline{z}_0} =$$
$$= \frac{(1 - r_0^2)d\theta}{1 - r_0(\mathrm{e}^{i(\varphi_0 - \theta)} + \mathrm{e}^{-i(\varphi_0 - \theta)}) + r_0^2} = \frac{(1 - r_0^2)d\theta}{1 - 2r_0\cos(\varphi_0 - \theta) + r_0^2}$$

Подставляя $d\psi$ в интеграл, получается формула Пуассона. $\blacksquare$

Теорема 17.10 (существование решения задачи Дирихле в односвязной области)**.** *Пусть G — ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$. ∂G — кусочно-гладкая кривая. Функция u_0 непрерывна на ∂G.*

Тогда существует решение классической задачи Дирихле в G.

☐ По теореме Римана $\exists f$ — конформное отображение G на $\{|\omega| < 1\}$. В теореме (17.9) было построено решение классической задачи Дирихле в единичном круге. Т. к. f^{-1} — конформное отображение $\{|\omega| < 1\}$ на G, то по принципу соответствия границ f^{-1} непрерывно продолжается на $\{|\omega| = 1\}$ и взаимно однозначно отображает её на ∂G.

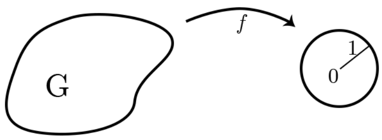

Рис. 17.10.

Тогда функция $\widetilde{u}_0(\omega) = u_0(f^{-1}(\omega))$ непрерывна на $\{|\omega| = 1\}$. Следовательно, по теореме (17.9) найдётся $\widetilde{u}$ гармоническая в $\{|\omega| < 1\}$ и $\widetilde{u}\big|_{\partial G} = \widetilde{u}_0$. Тогда $\widetilde{u}(f(z))$ $(z \in G)$ — гармоническая в G по теореме (17.8).

Замечание. В доказательстве теоремы была выписана явная формула для u, т. е. доказательство было конструктивно.