ЛЕКЦИЯ 8

Теория вычетов (продолжение). Приращение аргумента z вдоль контура

8.1. Вычисление несобственных интегралов в $\mathbb{R}$ через вычеты

Утверждение 8.1 (Нахождение интеграла в смысле главного значения через вычеты)**.** Пусть функция f регулярна в верхней полуплоскости:

$$f \in C^1(\{\mathrm{Im}\ z > 0\} \backslash \{a_1, \ldots, a_k\}), \quad \text{где } a_1, \ldots, a_k \in \{\mathrm{Im}\ z > 0\},$$

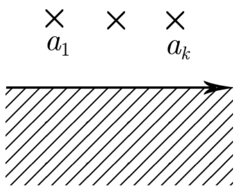

Рис. 8.1.

$$f \in C(\{\mathrm{Im}\ z \geqslant 0\} \backslash \{a_1, \ldots a_k\}, \qquad M(R) = \max_{z \in C_R} |f(z)|,$$

где

$$C_R = \{|z| = R,\ \mathrm{Im}\ z \geqslant 0\}, \quad \forall R > 0.$$

Пусть также

$$M(R) \cdot R \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0.$$

Тогда

$$(v.p.) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{a_j} f \right).$$

Интеграл в смысле главного значения по Коши:

$$(v.p.) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \equiv \lim_{R \to +\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\, dx$$

Если $(v.p.)$ сходится, то из этого не следует, что интеграл в обычном смысле сходится, но из сходимости в обычном смысле следует сходимость интеграла в смысле $(v.p.)$

Пример 8.1.

$$(v.p.) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

но расходится в обычном смысле.

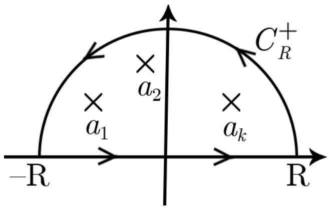

Рис. 8.2.

□ Для доказательства используется теорема Коши о вычетах.

Рассмотрим C_R, где R достаточно велико, чтобы C_R включало все особые точки.

Рассматриваем область $G(R) = B_R(0) \cap \{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. Т. к. особых точек для f в верхней полуплоскости конечное число, то

$$\exists R_0 : \forall R \geqslant R_0 : a_1, \ldots, a_k \in G(R).$$

Для функции f и области $G(R)$ при $R \geqslant R_0$ по теореме Коши о вычетах:

$$\int\limits_{\partial G} f(z)\, dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{a_j} f(z) \right)$$

Интеграл в левой части состоит из двух частей:

$$\int\limits_{-R}^{R} f(z)\, dz + \int\limits_{C_R} f(z)\, dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{a_j} f \right) \text{ — верно для любого } R \geqslant R_0.$$

Пробуем перейти в этом равенстве к пределу при $R \to +\infty$.

$$\left| \int\limits_{C_R^+} f(z)\, dz \right| \leqslant \int\limits_{C_R} |f(z)| \cdot |dz|$$

В правой части стоит криволинейный интеграл первого рода.

$$\int\limits_{C_R} |f(z)| \cdot |dz| \leqslant M(R) \cdot \int\limits_{C_R} |dz| = M(R) \cdot \pi R \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$$

по условию утверждения 8.3, т. е.

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{C_R^+} f(z)\, dz = 0.$$

Далее, слагаемое $2\pi i \left(\sum\limits_{j=1}^{k} \operatorname*{res}\limits_{a_j} f \right)$ — константа, не зависящая от R, т. е. не изменится в пределе. Следовательно,

$$\exists \lim_{R \to +\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(z)\, dz = \lim_{R \to +\infty} \left(2\pi i \left(\sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{a_f} f \right) - \int\limits_{C_R^+} f(z)\, dz \right) =$$

$$= 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{a_j} f \right) - 0 = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{a_j} f \right).$$

■

Метод, использованный в доказательстве, часто используется при вычислении интегралов. Самое главное в этом случае — посчитать или оценить интеграл, соответствующий окружности (или другой части фигуры, замыкающей контур).

Заметим, что утверждение 8.3 можно применять к любой функции вида:

$$R_{n,m}(z) = \frac{a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0}.$$

$$|R_{n,m}(z)| = |z|^{n-m} \left| \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots}{b_m + \ldots} \right|,$$

т. е. при $m \geqslant n+2$ условия утверждения 8.3 выполнены, если

$$b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0 \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Пример 8.2.

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$$

Решение

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+1},$$

все конечные особые точки: $z^4 = -1$, $\mathrm{e}^{i\pi/4}$, $\mathrm{e}^{3i\pi/4}$, $\mathrm{e}^{5i\pi/4}$, $\mathrm{e}^{7i\pi/4}$.

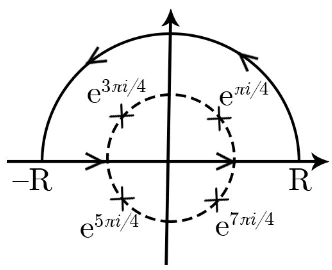

Рис. 8.3.

По утверждению 8.3

$$(\cancel{v}.\cancel{p}.) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx.$$

Сходится в обычном смысле из-за порядка степеней числителя и знаменателя, $(v.p.)$ можно убрать

$$(\cancel{v}.\cancel{p}.) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{\mathrm{e}^{pi/4}} f + \operatorname*{res}_{\mathrm{e}^{3\pi i/4}} f \right).$$

Особые точки — полюса первого порядка, следовательно,

$$I = 2\pi i \cdot \left(\left. \frac{z^2}{(z^4+1)'} \right|_{\mathrm{e}^{\pi i/4}} + \left. \frac{z^2}{(z^4+1)'} \right|_{\mathrm{e}^{3\pi/4}} \right) = \frac{2\pi i}{4} \left(\left. \frac{1}{z} \right|_{\mathrm{e}^{\pi i/4}} + \left. \frac{1}{z} \right|_{\mathrm{e}^{3\pi i/4}} \right) = \frac{\pi i}{2} \left(\mathrm{e}^{-\pi i/4} + \mathrm{e}^{-3\pi/4} \right).$$

Быстрее считать в форме Эйлера. Так как изначально интеграл, очевидно, должен получиться действительным (более того — положительным), то все i должны сократиться.

$$I = \frac{\pi}{2}\left(i\,\mathrm{e}^{-\pi i/4} + i\,\mathrm{e}^{-3\pi i/4}\right) = \left| i = \mathrm{e}^{\pi i/2} \right| = \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^{i(\pi/2-\pi/4)} + \mathrm{e}^{i(\pi/2-3\pi/4)}\right) =$$
$$= \frac{\pi}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^{i\pi/4} + \mathrm{e}^{-i\pi/4}\right) = \left| \cos z = \frac{\mathrm{e}^{iz}+\mathrm{e}^{-iz}}{2} \right| = \frac{\pi}{2}\cdot\left(2\cos\frac{\pi}{4}\right) = \pi\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Утверждение 8.2 (Лемма Жордана)**.** Пусть функция $f \in C(\{\mathrm{Im}\, z \geqslant 0, |z| \geqslant R_0\})$ для некоторого $R_0 > 0$. Пусть

$$M(R) = \max_{z\in C_R} |f(z)| \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0, \quad \text{где } C_R = \{|z| = R, \mathrm{Im}\, z \geqslant 0\}.$$

Тогда

$$\int\limits_{C_R^+} \mathrm{e}^{i\alpha z}\cdot f(z)dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0,$$

если $\alpha > 0$ (т. е. α автоматически действительное).

□ Оценим интеграл сверху. Если взять параметризацию полуокружности через полярный угол

$$z = R\cdot\mathrm{e}^{it}, \quad t\in[0,\pi], \qquad dz = R\cdot i\cdot\mathrm{e}^{it}\,dt, \qquad z(t) = x(t) + iy(t),$$

тогда получим

$$\left|\int\limits_{C_R^+} \mathrm{e}^{i\alpha z}\, f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_0^\pi f(R\cdot\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{e}^{i\alpha(x+iy)}\, i\cdot R^{it}\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^\pi |f(R\,\mathrm{e}^{it})|\cdot|\,\mathrm{e}^{i\alpha x}\,|\cdot\mathrm{e}^{-\alpha y}\,|i|R|\,\mathrm{e}^{it}\,|dt \leqslant$$
$$\leqslant M(R)\cdot R\cdot\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^{-\alpha y}\,dt = M(R)\cdot R\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^{-\alpha R\sin t}\,dt \ominus$$

Поскольку синус чётен относительно точки $\frac{\pi}{2}$ на отрезке $[0,\pi]$, то $\forall t\in[0,\pi/2]$

$$\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t \quad\Rightarrow\quad -\sin t \leqslant -\frac{2}{\pi}t.$$

$$\ominus\, 2M(R)\cdot R\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\alpha R\sin t}\,dt \leqslant 2M(R)R\int\limits_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-\alpha R\frac{2}{\pi}t}\,dt =$$
$$= 2M(R)\cdot R\cdot\left.\frac{\mathrm{e}^{-\alpha R\frac{2}{\pi}t}}{-\alpha R\frac{2}{\pi}}\right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi M(R)}{-\alpha}(\mathrm{e}^{-\alpha R}-1) = \frac{\pi M(R)}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha R}).$$

При $\alpha > 0$

$$\mathrm{e}^{-\alpha R}\xrightarrow[R\to+\infty]{} 0, \quad\Rightarrow\quad \frac{\pi M(R)}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha R})\xrightarrow[R\to+\infty]{} 0,$$

т. к. $M(R)\to 0$ по условию. ■

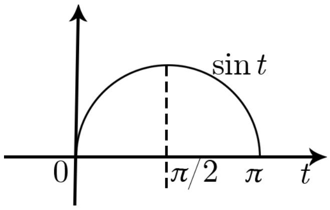

Рис. 8.4.

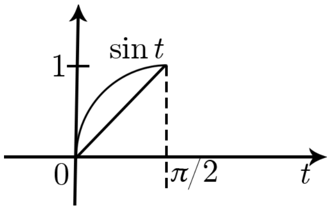

Рис. 8.5.

Пример 8.3 (Интеграл Лапласа)**.**

$$I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Решение

Ключевой момент — оценка подынтегральной функции на верхней полуокружности. Данную функцию оценить не получится, потому что косинус растёт как экспонента.

1)

$$I(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi.$$

2) $I(\alpha)$ чётная по α, поэтому достаточно вычислить только при $\alpha > 0$, а потом продолжить ответ чётным образом.

3) Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$J(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha x}}{1+x^2} dx,$$

в $\mathbb{R}$:

$$J(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx + i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1+x^2} dx, \qquad I(\alpha) = \operatorname{Re} J(\alpha).$$

Распространение функции в $\mathbb{C}$:

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{i\alpha z}}{1+z^2}.$$

Область

Из конечных особых точек $z = \pm i$, нас интересует только i.

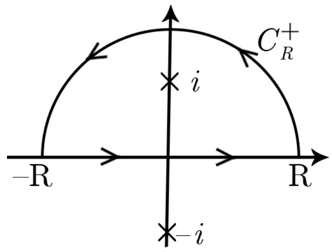

Рис. 8.6.

Для области $G(R) = B_R(0) \cap \{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ при $R > 1$, и функции $f(z)$ по теореме Коши о вычетах

$$\int\limits_{\partial G(R)^+} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{i} f,$$

$$\int\limits_{-R}^{R} f(z)\,dz + \int\limits_{C_R^+} f(z)dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{i} f,$$

при $R \to +\infty$

$$(\cancel{v}.\cancel{p}.)J(\alpha) + 0 = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{i} f.$$

Второй интеграл равен нулю по лемме Жордана при $\alpha > 0$. Вид подынтегральной функции при $\alpha > 0$

$$\mathrm{e}^{i\alpha z} \cdot \frac{1}{1+z^2}.$$

Т. к.

$$\max_{z \in C_R} \left| \frac{1}{1+z^2} \right| \leqslant \frac{1}{R^2} \to 0, \quad R \to +\infty,$$

то лемма Жордана в данном случае применима, поэтому, учитывая, что i — полюс первого порядка,

$$J(\alpha) = 2\pi i \cdot \left. \frac{\mathrm{e}^{i\alpha z}}{(z^2+1)'} \right|_i = 2\pi i \cdot \frac{\mathrm{e}^{i\alpha i}}{2i} = \mathrm{e}^{-\alpha}\,\pi,$$

где $\alpha > 0$. Следовательно,

$$I(\alpha) = \mathrm{Re}\; J(\alpha) = \mathrm{e}^{-\alpha}\,\pi, \quad \alpha > 0$$

Тогда чётно продолжаем для всех $\alpha \in \mathbb{R} : \pi\,\mathrm{e}^{-|\alpha|}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

8.2. Многозначные функции. Выделение непрерывных ветвей многозначных функций.

Конкретная цель данной темы — задать правила подсчёта корней и логарифмов в $\mathbb{C}$.

Определение 8.1 (Многозначная функция)**.** Пусть есть множество $G \subset \mathbb{C}$, пусть есть отображение $F : G \subset \mathbb{C} \to 2^{\mathbb{C}}$, где $2^{\mathbb{C}}$ — множество всех подмножеств комплексных чисел (стандартное обозначение: если X — множество, то 2^X — множество всех его подмножеств), т. е. $\forall z \in G : z \to F(z) \subset G$, где $F(z)$ — множество. Тогда F называется **многозначной функцией**.

Определение 8.2 (Ветвь многозначной функции)**.** Пусть есть многозначная функция $F : G \subset \mathbb{C} \to 2^{\mathbb{C}}$. Пусть рассматривается обычная (не многозначная) функция $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, причём они связаны следующим образом:

$$\forall z \in G : f(z) \in F(z).$$

Тогда f называется ветвью (селекцией/выборкой) многозначной функции F.

Пример 8.4. Если $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, то у неё есть какие-либо полярные координаты.

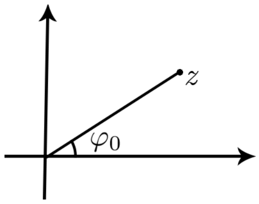

Рис. 8.7.

$$\exists\varphi_0 \in [0, 2\pi) : \cos\varphi_0 = \frac{x}{|z|}, \quad \sin\varphi_0 = \frac{y}{|z|}, \quad z = x + iy,$$

то есть φ_0 — один из полярных углов, соответствующих точке z. Назовём его главным аргументом и обозначим

$$\varphi_0 \equiv \arg_{\text{гл}} z.$$

Остальные углы обозначаются так:

$$\operatorname{Arg} z \equiv \{\arg_{\text{гл}} z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Тогда функция

$$\operatorname{Arg} z : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to 2^{\mathbb{R}}$$

является многозначной, а её ветвь

$$\arg_{\text{гл}} z : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to [0, 2\pi).$$

НЛО (небольшое лирическое отступление)

Вопрос: в каких областях можно выделить непрерывные ветви многозначной функции $\operatorname{Arg} z$?

Пусть $G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Допустим, была выделена непрерывная ветвь аргумента. Пусть функция

$$\varphi : G \to \mathbb{R} : \varphi(z) \in \operatorname{Arg} z,$$

непрерывна. Рассмотрим единичную окружность и точку 1 на ней. $\varphi(1)$ принимает какое-то значение. Пусть $\varphi(1) = 2014\pi$. Тогда при непрерывном перемещении вдоль этой окружности после полного оборота выбора нет. Так, в точке i $\varphi(i) = 2014\pi + \pi/2$ и т. д. Проблема возникает в точке 1, т. е. либо $\varphi(1) = 2016\pi$, что невозможно для обычной функции, либо $\varphi(1) = 2014\pi$, и $\varphi(z)$ — не является непрерывной.

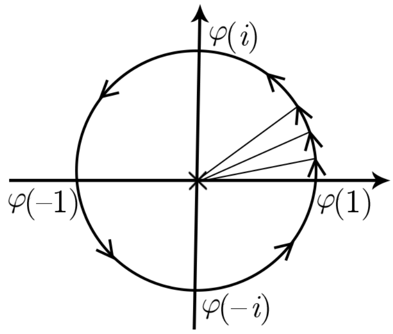

Рис. 8.8.

8.3. Выделение непрерывных ветвей функции $\operatorname{Arg} z$.

Утверждение 8.3 (Непрерывное изменение угла вдоль кривой)**.** Пусть есть отображение

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma \in C^1([0,1]), \quad \gamma(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,1],$$

а также пусть $\varphi_0 \in \operatorname{Arg} \gamma(0)$.

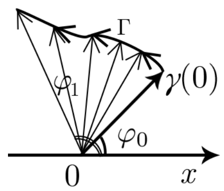

Рис. 8.9.

Тогда

$$\exists! \varphi : [0,1] \to \mathbb{R} : \varphi \in C([0,1]) : \cos\varphi(t) = \frac{x(t)}{|\gamma(t)|}, \quad \sin\varphi(t) = \frac{y(t)}{|\gamma(t)|},$$

где $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, т. е. функция в каждой точке в точности равна углу и непрерывная, причём $\varphi(0) = \varphi_0$.

$\square$ Для доказательства явно выписываем φ и проверяем для неё все условия (конструктивное доказательство).

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) \equiv \varphi_0 + \int\limits_0^t \frac{y'(\tau)\cdot x(\tau) - x'(\tau)\cdot y(\tau)}{x^2(\tau) + y^2(\tau)} d\tau.$$

Т. к.

$$\varphi'(t) = \frac{y'(\tau)\cdot x(\tau) - x'(\tau)\cdot y(\tau)}{x^2(\tau) + y^2(\tau)},$$

то $\varphi(t) \in C^1([0,1])$ (т. к. φ' непрерывная). Обозначим $\varphi(0) = \varphi_0$.

Проверяем, что $\varphi(t)$ — угол в точке $\gamma(t)$. Рассматриваем вспомогательные функции

$$u(t) = \cos\varphi(t), \qquad v(t) = \sin\varphi(t), \qquad \hat{u} = \frac{x(t)}{|\gamma(t)|}, \qquad \hat{v} = \frac{y(t)}{|\gamma(t)|}.$$

Докажем, что одна пара совпадает с другой. Замечаем, что

$$u'(t) = -\sin\varphi \cdot \varphi'(t) = -v(t) \cdot \varphi'(t),$$

$$v'(t) = \cos\varphi(t) \cdot \varphi'(t) = u(t) \cdot \varphi'(t).$$

Получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u'(t) = -v(t) \cdot \varphi'(t), \\ v'(t) = u(t) \cdot \varphi'(t). \end{cases}$$

Проверяем для $\hat{u}$, $\hat{v}$. Т. к. $|\gamma(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$, то

$$\hat{u}'(t) = \frac{x'(t)}{|\gamma(t)|} + x(t)\frac{[2x'(t)x(t) + 2y'(t)y(t)] \cdot (-\frac{1}{2})}{|\gamma(t)|^3} = \frac{x'}{|\gamma|} - x \cdot \frac{x \cdot x' + y \cdot y'}{|\gamma|^3} =$$
$$= \frac{x'(|\gamma|)^2 - x^2 \cdot x' - x \cdot y \cdot y'}{(|\gamma|)^3} = \frac{x'(x^2+y^2) - x^2x' - x \cdot y \cdot y'}{(|\gamma|)^3} =$$
$$= \frac{y^2x' - xyy'}{|\gamma|^3} = -\frac{y}{|\gamma|} \cdot \frac{y'x - x'y}{|\gamma|^2} = -\hat{v}(t) \cdot \varphi'(t).$$

Аналогично проверяется, что $\hat{v}' = \hat{u} \cdot \varphi(t)$. Таким образом, пары функций u, v, и $\hat{u}$, $\hat{v}$ являются решением одной и той же системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Т. к.

$$u(0) = \cos\varphi(0) = \cos\varphi_0, \quad v(0) = \sin\varphi(0) = \sin\varphi_0, \quad \hat{u}(0) = \frac{x(0)}{|\gamma(0)|}, \quad \hat{v}(0) = \frac{y(0)}{|\gamma(0)|}.$$

Поскольку $\varphi_0 \in \operatorname{Arg}\gamma(0)$, то $u(0) = \hat{u}(0)$ и $v(0) = \hat{v}(0)$. Следовательно, по теореме Коши из курса дифференциальных уравнений о существовании и единственности системы уравнений получается, что

$$u(t) = \hat{u}(t), \qquad v(t) = \hat{v}(t) \quad \forall t \in [0,1],$$

т. е. существование непрерывной φ доказано.

Докажем единственность (от противного). Предположим, что существует другая функция

$$\hat{\varphi} \in C[0,1] : \hat{\varphi}(t) \in \operatorname{Arg}\gamma(t) \quad \forall t \in [0,1].$$

Рассмотрим разность $h(t) = \varphi(t) - \hat{\varphi}(t)$ — непрерывная функция на отрезке $[0,1]$, причём по построению

$$h(t) = 2\pi k(t), \quad k(t) \in \mathbb{Z}$$

как разность углов в одной точке, причём

$$h(0) = \hat{\varphi}(0) - \varphi(0) = \varphi_0 - \varphi_0 = 0.$$

Таким образом, $h(t)$ — непрерывная функция, принимающая дискретные значения. Тогда по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции $h(t) \equiv 2\pi k$, где k не зависит от t, иначе множество значений несвязно, но

$$h(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \hat{\varphi}(t) \quad \forall t \in [0,1].$$

■

Заметим, что вид $\varphi(t)$ из доказательства утверждения 8.3 можно упростить. Рассмотрим

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{x'(t) + i \cdot y'(t)}{x(t) + i \cdot y(t)} = \frac{(x' + i \cdot y')(x - i \cdot y)}{x^2 + y^2} = \frac{x' \cdot x + y \cdot y'}{x^2 + y^2} + i \cdot \frac{y' \cdot x - x' \cdot y}{x^2 + y^2},$$

т. е.

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int\limits_0^t \operatorname{Im} \frac{y'(t)}{\gamma(t)}\, dt.$$

Определение 8.3 (Приращение аргумента $\gamma(t)$ на отрезке $[0, 1]$)**.** В условиях утверждения 8.3 величина приращения

$$\Delta_{[0,1]} \arg \gamma(t) \equiv \int\limits_0^1 \operatorname{Im} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt$$

называется **приращением аргумента** $\gamma(t)$ **на отрезке** $[0, 1]$.

Геометрический смысл данной величины — разница между начальным и конечным углом.