ЛЕКЦИЯ 6

Ряды Лорана. Изолированные особые точки

6.1. Ряды Лорана (продолжение)

На предыдущей лекции было введено понятие **ряд Лорана**:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad c_n \in \mathbb{C}, \quad a \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Было также определено, что ряд Лорана **сходится** тогда и только тогда, когда сходится ряд:

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n \tag{6.1}$$

и ряд:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n. \tag{6.2}$$

На прошлой лекции были приведены рассуждения, показывающие, что ряд Лорана сходится на кольце (см. рис. 6.1):

$$V_{r,R}(a) = \Big\{ z \in \mathbb{C} : \; r < \big|z-a\big| < R \Big\},$$

где по **формуле Коши – Адамара**:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}, \qquad r = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}.$$

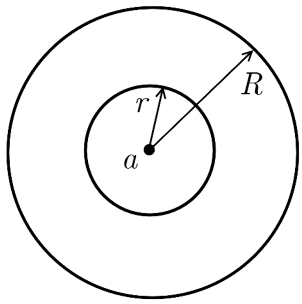

Рис. 6.1.

Также известно, что:

$$V_{r,R} \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad R > r.$$

Необходимо напомнить, что не исключены крайние случаи:

$$0 \leqslant r < R \leqslant +\infty.$$

Ряд Лорана равномерно сходится на любом замкнутом кольце следующего вида (см. рис. 6.2):

$$\overline{V_{\rho,\rho_1}(a)}, \quad r < \rho < \rho_1 < R.$$

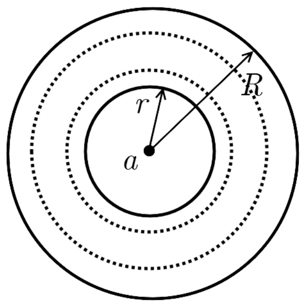

Рис. 6.2.

Тогда ряд Лорана сходится равномерно строго внутри кольца $V_{r,R}(a)$. Здесь используется термин, впервые введенный в теореме Вейерштрасса. Из данной теоремы также имеется следствие:

Следствие 6.1. *Если функция представима рядом Лорана, то есть:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad \forall z \in V_{r,R}(a),$$

то:

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot n(z-a)^{n-1}, \quad \forall z \in V_{r,R}(a).$$

Теорема 6.1. *Пусть функция f — регулярна в кольце:*

$$f \in \mathbb{C}^1\big(V_{r,R}(a)\big).$$

Тогда:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad \forall z \in V_{r,R}(a),$$

где:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^+(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\, d\xi, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

где также:

$$\Gamma_\rho(a) = \Big\{ \big|z - a\big| = \rho \Big\}, \quad \rho \in \big(r, R\big).$$

Суть данной теоремы заключается в том, что в ней говорится о разложении регулярной функции в ряд Лорана (см. рис. 6.3).

☐ В доказательстве будет использована интегральная формула Коши, а также интегральная теорема Коши.

Первая часть: покажем, что величина c_n не зависит от выбора $\rho \in (r, R)$.

Пусть выбраны числа ρ, ρ_1 такие, что (см. рис. 6.4):

$$r < \rho < \rho_1 < R.$$

Тогда для кольца $V_{\rho,\rho_1}(a)$ и для функции:

$$\frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}$$

выполняются условия теоремы Коши. Это означает, что в данном случае теорема Коши является применимой, и значит, можно записать:

$$\int\limits_{\partial\left(V_{\rho,\rho_1}(a)\right)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\, d\xi = \int\limits_{\Gamma_{\rho_1}^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\, d\xi + \int\limits_{\Gamma_\rho^-} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\, d\xi = 0.$$

Следовательно, равны интегралы:

$$\int\limits_{\Gamma_{\rho_1}^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\, d\xi = \int\limits_{\Gamma_\rho^-} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\, d\xi.$$

Таким образом, показано, что c_n не зависит от $\rho \in (r, R)$.

Вторая часть: пусть выбрана точка $z \in V_{r,R}(a)$. Так как $V_{r,R}(a)$ — открытое множество, то можно подобрать:

$$\rho,\ \rho_1 :\ r < \rho < \rho_1 < R,$$

причем (см. рис. 6.5):

$$z \in V_{r,R}(a).$$

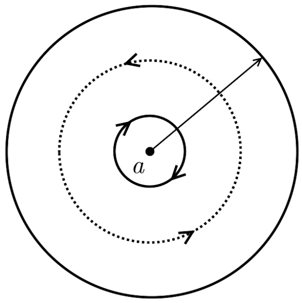

Рис. 6.3.

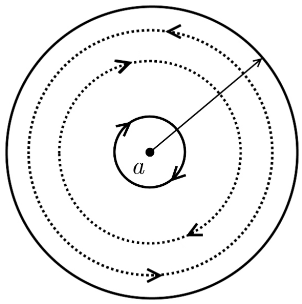

Рис. 6.4.

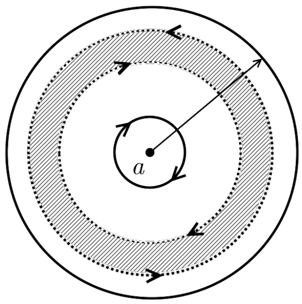

Рис. 6.5.

Для функции f и области $V_{r,R}(a)$ верна интегральная формула Коши (теорема «о мыльных пленках»), следовательно:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\left(V_{\rho,\rho_1}(a)\right)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+_{\rho_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+_{\rho}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi.$$

Обозначим:

$$I_1 = \int\limits_{\Gamma^+_{\rho_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - a}\,d\xi, \quad I_2 = \int\limits_{\Gamma^-_{\rho}} \frac{f(\xi)}{\xi - a}\,d\xi = 0.$$

Распишем сначала для первого интеграла I_1:

$$\frac{1}{\xi - a} = \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)} = \frac{1}{\xi - a}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}}.$$

Так как:

$$\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| < 1,$$

то для $\xi \in \Gamma_{\rho_1}$:

$$\frac{1}{\xi - a}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} = \frac{1}{\xi - a}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n.$$

Следовательно:

$$I_1 = \int\limits_{\Gamma^+_{\rho_1}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} f(\xi)\cdot\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}\right)d\xi.$$

Так как функция f — непрерывна на Γ_{ρ_1}, то:

$$\exists M > 0 : \ \big|f(\xi)\big| \leqslant M, \quad \forall \xi \in \Gamma_{\rho_1}.$$

Далее запишем:

$$\left|\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}\right| = \frac{q^n}{\rho_1},$$

где:

$$q = \left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| < 1.$$

Таким образом, ряд под интегралом оценивается сверху по модулю:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M}{2\pi}\cdot\frac{q^n}{\rho_1} \text{ — сходящийся ряд,}$$

следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно на $\Gamma^+_{\rho_1}$.

В итоге получим:

$$I_1 = \sum_{n=0}^{+\infty}(z-a)^n\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+_{\rho_1}}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

где c_n не зависит от ρ_1 (по первой части доказательства).

Далее проделаем похожие рассуждения для I_2:

$$I_2 = \int\limits_{\Gamma_\rho^-} \frac{f(\xi)}{\xi - a}\, d\xi = -\int\limits_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - a}\, d\xi.$$

Распишем:

$$-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(z-a) - (\xi - a)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - a}{z - a}}.$$

Так как:

$$\left|\frac{z-a}{\xi - a}\right| < 1,$$

то для $\xi \in \Gamma_\rho$:

$$\frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - a}{z-a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\xi - a)^n}{(z-a)^{n+1}}.$$

Тогда:

$$I_2 = \int\limits_{\Gamma_\rho^+} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} f(\xi) \cdot \frac{(\xi - a)^n}{(z-a)^{n+1}} \right) d\xi.$$

Аналогично доказательству для I_1 можно записать (так как ряд сходится равномерно на Γ_ρ):

$$\int\limits_{\Gamma_\rho^+} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} f(\xi) \cdot \frac{(\xi - a)^n}{(z-a)^{n+1}} \right) d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} (z-a)^{-n-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^+} f(\xi)(\xi - a)^n\, d\xi \right).$$

Обозначим:

$$k = -n - 1 \Rightarrow \quad n = -k - 1.$$

Тогда перепишем:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (z-a)^{-n-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^+} f(\xi)(\xi - a)^n\, d\xi \right) =$$
$$= \sum_{k=-1}^{-\infty} (z-a)^k \cdot \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^+} f(\xi)(\xi - a)^{-k-1}\, d\xi \right) = \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^k.$$

Таким образом, теорема доказана. ■

6.2. Изолированные особые точки

Определение 6.1. Точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется **изолированной особой точкой** функции f, если верно следующее (см. рис. 6.6):

$$\exists \delta > 0 : \; f \in \mathbb{C}^1\Big(\dot{B}_\delta(a)\Big), \quad f \notin \mathbb{C}^1\Big(B_\delta(a)\Big).$$

Определение 6.2. Пусть точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ является изолированной особой точкой функции f. Тогда:

1) Точка a называется **устранимой особой точкой** функции f, если:

$$\exists \lim_{z \to a} f(z) = A \in \mathbb{C};$$

2) Точка a называется **полюсом** функции f, если:

$$\exists \lim_{z \to a} f(z) = \infty;$$

3) Точка a называется **существенно особой точкой** функции f, если:

$$\nexists \lim_{z \to a} f(z).$$

Заметим, что из определения 6.1 следует, что если $a \in \overline{\mathbb{C}}$ является изолированной особой точкой функции f, то выполняется:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad \forall z \in \dot{B}_\delta(a).$$

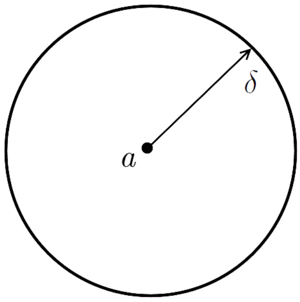

Рис. 6.6.

Теорема 6.2 (Характеризация устранимой особой точки через ряд Лорана). *Пусть точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ является изолированной особой точкой функции f. Тогда верен следующий критерий: точка a является устранимой особой точкой тогда и только тогда, когда:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad \forall z \in \dot{B}_\delta(a), \quad \delta > 0.$$

$\square$ Первая часть ($\Rightarrow$): так как точка a является устранимой особой точкой функции f, то:

$$\exists \lim_{z \to a} f(z) = A \in \mathbb{C}.$$

Тогда как минимум верно следующее:

$$\exists M > 0, \ \exists \delta > 0 : \ \bigl|f(z) \leqslant M\bigr|, \quad \forall z \in \dot{B}_\delta(a).$$

Значит, из неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана следует (см. рис. 6.7):

$$\bigl|c_n\bigr| \leqslant \frac{M}{\rho^n} = M\rho^{-n} \to 0, \quad \rho \to 0, \quad \forall \rho \in \bigl(0, \delta\bigr), \quad n < 0.$$

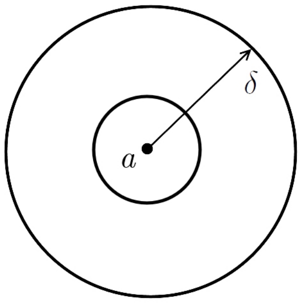

Рис. 6.7.

Так как c_n не зависит от ρ, то это возможно только в том случае, если $c_n = 0$ при всех отрицательных n.

Вторая часть ($\Leftarrow$): обозначим сумму ряда:

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad \forall z \in B_\delta(a).$$

Так как $\tilde{f}$ — непрерывна в точке a как сумма степенного ряда, то у нее существует предел:

$$\exists \lim_{z\to a} \tilde{f}(z) = \tilde{f}(a) = c_0.$$

Тогда:

$$\exists \lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} \tilde{f}(z) = c_0,$$

что и требовалось доказать. ■

Теорема 6.3 (**Характеризация полюса через ряд Лорана**). *Пусть точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ является изолированной особой точкой функции f. Тогда верен следующий критерий: точка a является полюсом тогда и только тогда, когда:*

$$f(z) = \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_{-N} \neq 0, \quad \forall z \in \dot{B}_\delta(a), \quad \delta > 0.$$

□ Идея доказательства — рассмотрим функцию $\varphi = \frac{1}{f}$ и разложим ее в ряд Тейлора.

Первая часть ($\Rightarrow$): известно, что:

$$\exists \lim_{z\to a} f(z) = \infty \Rightarrow \quad \exists \delta > 0: \ f(z) \neq 0, \quad \forall z \in \dot{B}_\delta(a).$$

Тогда функцию $\varphi(z)$ можно рассматривать в $\dot{B}_\delta(a)$, причем:

$$\lim_{z\to a} \varphi(z) = \lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0,$$

то есть точка $z = a$ является устранимой особой точкой функции φ.

По теореме 6.2 тогда можно записать:

$$\varphi(z) = b_N (z-a)^N + b_{N+1}(z-a)^{N+1} + \dots, \quad N \geqslant 1, \quad b_N \neq 0,$$

так как:

$$\lim_{z\to a} \varphi(z) = 0, \quad b_0 = 0.$$

Тогда:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^N \big(b_N + b_{N+1}(z-a) + \dots\big)}, \quad \forall z \in \dot{B}_\delta(a).$$

Обозначим:

$$g(z) = b_N + b_{N+1}(z-a) + \dots,$$

тогда получается, что:

$$g \in \mathbb{C}^1\Big(\dot{B}_\delta(a)\Big),$$

то есть:

$$g(a) = b_N \neq 0.$$

Тогда:

$$\frac{1}{g(z)} \in \mathbb{C}^1\Big(\dot{B}_{\delta_1}(a)\Big), \quad \delta_1 \in (0, \delta],$$

причем:
$$\frac{1}{g(a)} \neq 0.$$

Значит:
$$\frac{1}{g(z)} = c_{-N} + C_{-N+1}(z-a) + \ldots, \quad c_{-N} \neq 0,$$
то есть, получился ряд Тейлора для регулярной в круге функции. Тогда:
$$f(z) = \frac{\frac{1}{g(z)}}{(z-a)^N} = \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad c_{-N} \neq 0.$$

Вторая часть ($\Leftarrow$): так как:
$$f(z) = \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad c_{-N} \neq 0,$$
то вынесем за скобку:
$$\frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n = \frac{1}{(z-a)^N}\big(c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \ldots\big).$$

Обозначим:
$$h(z) = c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \ldots,$$
тогда:
$$h \in \mathbb{C}^1\big(B_\delta(a)\big), \quad \delta > 0,$$
причем:
$$h(a) = c_{-N} \neq 0.$$

Следовательно:
$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^N}, \quad h(a) \neq 0,$$
а значит:
$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty,$$
что и требовалось доказать. ■

Следствие 6.2. *Пусть $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции f. Тогда точка a является полюсом f тогда и только тогда, когда выполняется критерий:*
$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^N}, \quad N \geqslant 1,$$
где:
$$h \in \mathbb{C}^1\big(B_\delta(a)\big), \quad h(a) \neq 0.$$

Доказательство следствия 6.2 фактически приведено внутри доказательства теоремы 6.3.

Определение 6.3. Пусть $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции f и пусть выполняется критерий:

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^N}, \quad N \geqslant 1,$$

где:

$$h \in \mathbb{C}^1\big(B_\delta(a)\big), \quad h(a) \neq 0.$$

Тогда число N называется **порядком полюса** в точке a для функции f.

Определение 6.4. Точка $a \in \mathbb{C}$ называется **нулем функции** f порядка n, если:

$$f \in \mathbb{C}^1\big(B_\delta(a)\big), \quad \delta > 0,$$

причем:

$$0 = f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a), \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Утверждение 6.1. Пусть функция f:

$$f \in \mathbb{C}^1\big(B_\delta(a)\big).$$

Тогда a является нулем функции f порядка n тогда и только тогда, когда выполняется критерий:

$$f(z) = c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \dots, \quad \forall z \in B_\delta(a).$$

□ Доказательство следует из того, что известно, чему равно c_n.
Так как a является нулем функции порядка n, то по определению 6.4:

$$0 = f(a) = \dots = f^{(n-1)}(a), \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Так как известно, что:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

то можно записать:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-a)^k, \quad \forall z \in B_\delta(a).$$

Тогда окончательно получаем:

$$0 = c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1}, \quad c_n \neq 0,$$

что и требовалось доказать. ■

Утверждение 6.2 (**Способ определения порядка полюса**)**.** Пусть есть функция:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

где $a \in \mathbb{C}$ — нуль функции g порядка $n \in \mathbb{Z}_+$, а $a \in \mathbb{C}$ — нуль функции h порядка $m \in \mathbb{N}$.

Тогда:

1) Если $m > n$, то a — полюс функции f порядка $(m-n)$;
2) Если $m \leqslant n$, то a — устранимая особая точка функции f.

☐ В доказательстве будет использоваться утверждение 6.1.
Из утверждения 6.1 следует, что:

$$g(z) = (z-a)^n \cdot g_1(z), \quad g_1(z) \in \mathbb{C}^1\big(B_\delta(a)\big), \quad g_1(a) \neq 0;$$
$$h(z) = (z-a)^m \cdot h_1(z), \quad h_1(z) \in \mathbb{C}^1\big(B_\delta(a)\big), \quad h_1(a) \neq 0.$$

Тогда:

$$f(z) = \frac{(z-a)^n \cdot g_1(z)}{(z-a)^m \cdot h_1(z)}.$$

Если $m > n$, то:

$$f(z) = \frac{\frac{g_1(z)}{h_1(z)}}{(z-a)^{m-n}},$$

следовательно, по определению 6.3 — a является полюсом функции f порядка $m-n$.
Если $m \leqslant n$, то:

$$f(z) = (z-a)^{n-m} \cdot \frac{g_1(z)}{h_1(z)} \to 0, \quad z \to a, \quad n > m,$$
$$f(z) = (z-a)^{n-m} \cdot \frac{g_1(z)}{h_1(z)} \to \frac{g_1(a)}{h_1(a)}, \quad z \to a, \quad n = m.$$

В обоих случаях видно, что точка a является устранимой особой точкой, что и требовалось доказать. ■

Теорема 6.4. *Пусть $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции f. Тогда верен следующий критерий: точка a является существенно особой точкой функции f тогда и только тогда, когда $\dot{B}_\delta(a)$ содержит бесконечно много дробей с ненулевыми коэффициентами.*

Данная теорема следует из теорем 6.2 и 6.3.

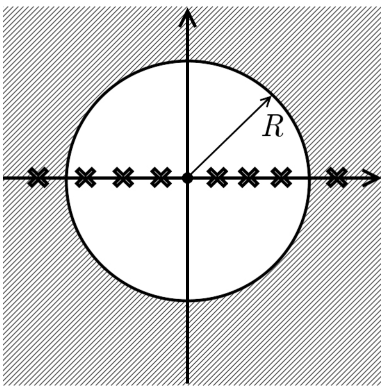

Рис. 6.8.

Определение 6.5. Для случая, когда $a \in \mathbb{C}$ является изолированной особой точкой в ряде Лорана следующие компоненты называются:

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n \text{ — } \textbf{главная часть ряда Лорана};$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \text{ — } \textbf{правильная часть ряда Лорана}.$$

Пример 6.1. Дана функция:

$$\frac{1}{\sin z}$$

и точки:

$$z = 0, \quad z = \infty.$$

Так как:

$$\sin z \Big|_{z=0} = 0, \quad \cos z \Big|_{z=0} \neq 0,$$

то числитель имеет ноль нулевого порядка, а знаменатель — первого.

Тогда $z = 0$ — полюс первого порядка, а $z = \infty$ — не изолированная точка, что пояснено на рисунке 6.8.