ЛЕКЦИЯ 10

Выделение регулярных ветвей многозначных функций

В этой лекции будет рассмотрена задача выделение регулярных ветвей многозначных функций $\ln f(z)$ и $\sqrt[n]{f(z)}$.

Обязательное условие на область $G \subset \mathbb{C}$, в которой выделяются ветви:

1) $f \in C^1(G)$ — регулярна в области G.
2) $f(z) \neq 0, \quad \forall z \in G$.

Рассмотрим многозначную функцию $\operatorname{Ln} f(z)$.

$$\operatorname{Ln} f(z) : G \to 2^{\mathbb{C}},$$

$$\operatorname{Ln} f(z) : \{\ln|f(z)| + i(\arg_{\text{гл}} f(z) + 2nk), \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Тогда функция $\sqrt[n]{f(z)}$ определяется, как

$$\{\sqrt[n]{f(z)}\} : G \to 2^{\mathbb{C}},$$

$$\{\sqrt[n]{f(z)}\} = \sqrt[n]{|f(z)|}\, \exp\left(\frac{i(\arg_{\text{гл}} f(z) + 2nk)}{n}\right), \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Определение 10.1. Пусть Γ — кусочно-гладкая кривая в области G. Пусть $\gamma : [t_o; t_1] \to \Gamma$ — допустимая параметризация Γ. Функция вида $w(t) = f(\gamma(t))$ — параметризация множества $f(\Gamma)$, где $f(\Gamma)$ — кусочно-гладкая кривая. Тогда приращение вдоль кривой Γ аргумента равно:

$$\Delta_\Gamma \arg f(z) = \Delta_\Gamma \arg w(t) = \Delta_{[t_o;t_1]} \arg w(t),$$

где $w = f(z)$.

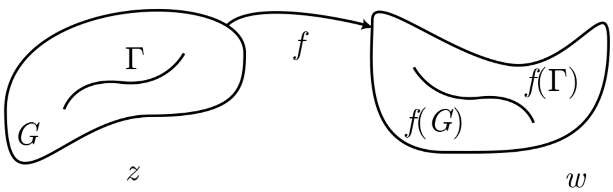

Рис. 10.1.

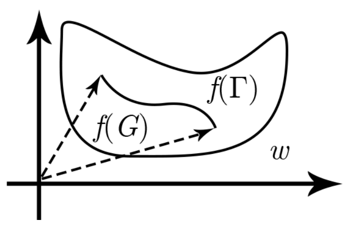

Рис. 10.2.

Рассмотрим свойства приращения аргумента вдоль кривой Γ. В указанных выше условиях выполняются:

Свойство 10.1.

$$\Delta_\Gamma \arg f(z) = \operatorname{Im} \int_{f(z)} \frac{dw}{w} = \operatorname{Im} \int_\Gamma \frac{f'(z)\,dz}{f(z)}.$$

Следует из аналогичного свойства для $\Delta_\Gamma \arg w$.

Свойство 10.2.

$$\Delta_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \arg f(z) = \Delta_{\Gamma_1} \arg f(z) + \Delta_{\Gamma_2} \arg f(z).$$

Следует из свойства 10.1 и аналогичного свойства интегралов.

Свойство 10.3. *Если* $f_1, f_2 \in C^1(G)$, $f_1(z) \neq 0, f_2(z) \neq 0, \forall z \in G$, *то*

$$\Delta_\Gamma \arg(f_1(z) f_2(z)) = \Delta_\Gamma \arg f_1(z) + \Delta_\Gamma \arg f_2(z),$$

$$\Delta_\Gamma \arg \frac{f_1(z)}{f_2 z} = \Delta_\Gamma \arg f_1(z) - \Delta_\Gamma \arg f_2(z).$$

Следует из определения 10.1 и аналогичных свойств величины $\Delta_\Gamma \arg w$.

Свойство 10.4. *Если G — односвязная область (область, в которой любая замкнутая кривая при непрерывной деформации стягивается в точку), то для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой в G выполняется:*

$$\Delta_\Gamma \arg f(z) = 0.$$

Следует из свойства 10.1 и того, что

$$\int\limits_{\Gamma\, \text{замкнутая в}\, G} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = 0$$

по теореме Коши, т. к. $f \in C^1(G)$.

Свойство 10.5. *Если в области G для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ приращение $\Delta_\Gamma \arg f(z) = 0$, то функция вида:*

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \Delta_\Gamma \arg f(z)$$

одна из непрерывных ветвей $Argf(z)$ в G. z_0 — фиксированная точка в области G; $\varphi_0 \in Argf(z_0)$; Γ — произвольная кусочно-гладкая кривая от z_0 до z в области G.

□ а) Т. к. $\Delta_\Gamma \arg f(z) = 0$, то $\varphi(z)$ не зависит от выбора кривой Γ, соединяющей точки z_0 и z.

б) Из определения 10.1 следует, что $\varphi(z) \in Argf(z)$, т. е. φ — ветвь $Argf(z)$.

в) Т. к.

$$\Delta_\Gamma \arg f(z) = \operatorname{Im} \int\limits_\Gamma \frac{f'(z)\,dz}{f(z)},$$

то, т. к. $\dfrac{f'}{f}$ — непрерывна и

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = 0$$

в области G, получим, что $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{f'(z)\,dz}{f(z)}$ — одна из первообразных $\dfrac{f'}{f}$ в области G. Т. е. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{f'(z)\,dz}{f(z)}$ — регулярна в области G. Значит мнимая часть интеграла — гармоническая и непрерывная функция. ■

Теорема 10.1 (Связь между непрерывными ветвями функций $\operatorname{Ln} f(z)$ и $\sqrt[n]{f(z)}$). *Пусть в области $G \subset \mathbb{C}$ выполнено условие:*

$$f \in C^1(G), \quad f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G.$$

Тогда:

1) *Если в области G можно выделить непрерывную ветвь многозначной функций $\operatorname{Ln} f(z)$: $h(z)$, то остальные непрерывные ветви $\operatorname{Ln} f(z)$ имеют вид:*

$$h_k(z) = h(z) + 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2) *Если в области G можно выделить непрерывную ветвь многозначной функций $\sqrt[n]{f(z)}$: $g(z)$, то остальные непрерывные ветви $\sqrt[n]{f(z)}$ имеют вид:*

$$g_k(z) = g(z)\, \mathrm{e}^{\dfrac{2\pi k i}{n}}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

□ При доказательстве будем использовать теорему о промежуточном значении непрерывной функции.

1) Если $h, \tilde{h}$ — две непрерывные ветви $\operatorname{Ln} f(x)$ в области G, то:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{e}^{h(z)} &= f(z) \\ \mathrm{e}^{\tilde{h}(z)} &= f(z) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{h(z)-\tilde{h}(z)} = 1.$$

Это возможно, когда

$$h(z) - \tilde{h}(z) = 2\pi i k(z), \quad k(z) \in \mathbb{Z}.$$

Т. к. $h(z) - \tilde{h}(z)$ непрерывна на связном множестве G, то $\{2\pi i k(z)\}$ — связное множество $\forall z \in G$. Это возможно, если $k(z) \equiv \mathrm{const}$ и не зависит от z.

2) Если $g, \tilde{g}$ — две непрерывные ветви $\sqrt[n]{f(z)}$ в области G, то:

$$\left.\begin{aligned} g^n z &= f(z) \\ \tilde{g}^n(z) &= f(z) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{g(z)}{\tilde{g}(z)}\right)^n = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g(z)}{\tilde{g}(z)} = \mathrm{e}^{\dfrac{2\pi i k(z)}{n}}, \quad k(z) \in \{0, \ldots, k-1\}.$$

Аналогично первой части доказательства можно показать, что $k(z) \equiv \mathrm{const}$ и не зависит от z. ■

Теорема 10.2 (Критерий выделения регулярных ветвей $\operatorname{Ln} f(z)$)**.** *Пусть в области $G \subset \mathbb{C}$ верно:*

$$f \in C^1(G), \quad f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G.$$

Тогда в G можно выделить регулярные ветви $\operatorname{Ln} f(z) \Leftrightarrow \Delta_\Gamma \arg f(z) = 0$, *для любой Γ — замкнутой кусочно-гладкой кривой в области G.*

Пример 10.1. Рассмотрим область $G = \mathbb{C} \backslash [-1; 1]$. Возникает вопрос, можно ли в области G выделить регулярные ветви функции $f(z) = \operatorname{Ln}((z-1)^2(z+1))$.

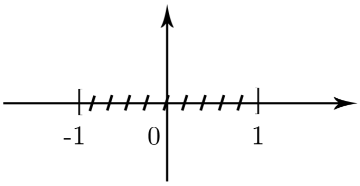

Рис. 10.3.

Найдем приращение аргумента:

$$\Delta_\Gamma \arg((z-1)^2(z+1)) = [\text{свойство 10.3}] = \Delta_\Gamma \arg(z-1)^2 + \Delta_\Gamma \arg(z+1) =$$

$$= 2\Delta_\Gamma \arg(z-1) + \Delta_\Gamma \arg(z+1).$$

Возьмем произвольную замкнутую кривую.

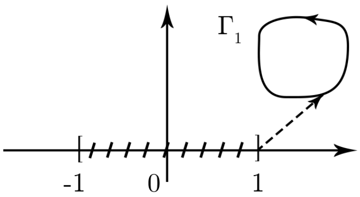

Рис. 10.4.

Проведем вектор из точки 1 к кривой Γ_1. Если вектор не повернулся вокруг точки, то $\Delta_\Gamma \arg(z-1) = 0$. Аналогично для точки -1 получим, что $\Delta_\Gamma \arg(z+1) = 0$.

Рассмотрим пример, когда кривая Γ_2 охватывает точки 1 и -1.

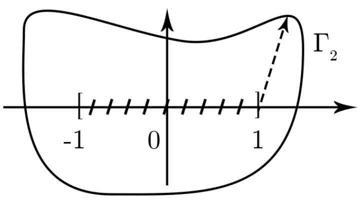

Рис. 10.5.

В этом случае $\Delta_\Gamma \arg(z-1) = 2\pi$ и $\Delta_\Gamma \arg(z+1) = 2\pi$. Тогда получим:

$$\Delta_\Gamma \arg((z-1)^2(z+1)) = 6\pi.$$

Значит для такой функции по однои из кривых Γ регулярные ветви выделить нельзя.

Пример 10.2. Рассмотрим область $G = \mathbb{C}\backslash[-1;1]$ и функцию $\operatorname{Ln}\dfrac{z-1}{z+1}$.

$$\Delta_\Gamma \arg\frac{z-1}{z+1} = \underbrace{\Delta_\Gamma \arg(z-1)}_{2\pi n} - \underbrace{\Delta_\Gamma \arg(z+1)}_{2\pi n} = 0,$$

где n — число обходов кривой Γ вокруг точек ±1. Главное, чтобы кривая охватывала

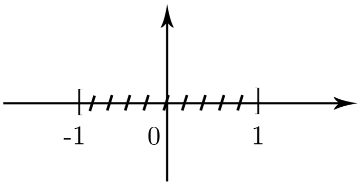

Рис. 10.6.

одновременно обе точки. Для такой функции регулярные ветви в области G выделить можно.

Для доказательства теоремы 10.2 докажем лемму.

Лемма 10.1. *Явный вид регулярной ветви*

Пусть в области $G \subset \mathbb{C}$ можно выделить регулярную ветвь h многозначной функции $\operatorname{Ln} f(z)$. Тогда:

$$\forall z \in G, h(z) = h(z_0) + \ln\left|\frac{f(z)}{f(z_0)}\right| + i\Delta_\Gamma \arg f(z),$$

где z_0 — фиксированная точка в области G; Γ — произвольная кусочно-гладкая кривая от z_0 до z в области G.

□ Будем использовать тот факт, что $\Delta_\Gamma \arg f(z)$ — единственная величина, описывающая непрерывное изменение угла вдоль кривой Γ. Пусть фиксированная точка $z_0 \in G$. Рассмотрим произвольную точку $z \in G$.

$$h(z) = \ln|f(z)| + i\operatorname{Im} h(z),$$

т. к. h — ветвь $\operatorname{Ln} f(z)$. Причем $\operatorname{Im} h(z) \in Argf(z)$ по определению многозначной функции. Обозначим

$$\varphi(z) = \operatorname{Im} h(z).$$

Рассмотрим разность

$$h(z) - h(z_0) = \ln|f(z)| - \ln|f(z_0)| + i(\varphi(z) - \varphi(z_0)).$$

По построению h видно, что $\varphi(z) \in Argf(z)$ — конец кривой $f(\Gamma)$, $\varphi(z_0) \in Argf(z_0)$ — начало кривой $f(\Gamma)$. Причем угол непрерывно меняется вдоль $f(\Gamma)$. Следовательно по теореме о непрерывном изменении угла вдоль кривой Γ (Лекция 8) есть только одна величина, которая описывает непрерывное изменение угла вдоль кривой $f(\Gamma)$. Т. е. обязательно выполняется:

$$\varphi(z) - \varphi(z_0) = \Delta_\Gamma \arg fw = \Delta_\Gamma \arg f(z).$$

Таким образом, получим:

$$h(z) - h(z_0) = \ln\left|\frac{f(z)}{f(z_0)}\right| + i\Delta_\Gamma \arg f(z).$$

■

Докажем теорему 10.2.

□ Будем использовать лемму 10.1 и явную формулу для ветви $\mathrm{Ln}\, f(z)$.

$\Rightarrow$ Если в области G можно выделить регулярную ветвь h функции $\mathrm{Ln}\, f(z)$, то по лемме 10.1 получим:

$$h(z) = h(z_0) + \ln\left|\frac{f(z)}{f(z_0)}\right| + i\Delta_\Gamma \arg f(z),$$

где z_0 — фиксированная точка в области G. Рассмотрим произвольную кусочно-гладкую замкнутую кривую Γ а области G.

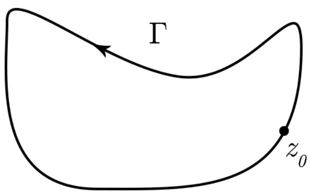

Рис. 10.7.

Выберем точку z_0 на кривой Γ. Тогда для $z = z_0$ получим:

$$h(z_0) = h(z_0) + \ln\left|\frac{f(z_0)}{f(z_0)}\right| + i\Delta_\Gamma \arg f(z).$$

Откуда следует, что

$$\Delta_\Gamma \arg f(z) = 0.$$

$\Leftarrow$ Пусть для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой Γ верно:

$$\Delta_\Gamma \arg f(z) = 0.$$

Тогда рассмотрим функцию

$$h(z) = \ln|f(z)| + i(\varphi_0 + \Delta_\Gamma \arg f(z)),$$

где z_0 — фиксированная точка в области G; $\varphi_0 \in Arg f(z_0)$; Γ — произвольная кусочно-гладкая кривая от z_0 до z в области G. Эта функция определена корректно, т. е. не зависит от выбора Γ от z_0 до z.

Если Γ_1, Γ_2 — две разные кусочно-гладкие кривые от z_0 до z в области G, то $\Gamma_2 \cup \Gamma_1^-$ — замкнутая кривая в области G. Значит по условию теоремы получим:

$$\Delta_{\Gamma_2 \cup \Gamma_1^-} \arg f(z) = 0,$$

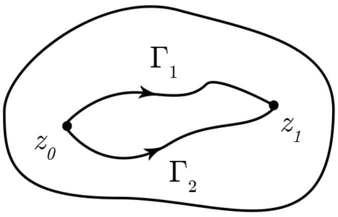

Рис. 10.8.

$$\Delta_{\Gamma_2} \arg f(z) + \Delta_{\Gamma_1^-} \arg f(z) = 0,$$

$$\Delta_{\Gamma_2} \arg f(z) = \Delta_{\Gamma_1} \arg f(z) = 0.$$

Корректность доказана. Теперь докажем непрерывность.

Т. к. по условию $\Delta_\Gamma \arg f(z) = 0$ для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ в области G, то по свойству 10.5 получим, что

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \Delta_\Gamma \arg f(z)$$

одна из непрерывных ветвей $Argf(z)$. Т. к.

$$h(z) = \ln|f(z)| + i\varphi(z),$$

то h — непрерывна в области G, причем $h(z) \in \{\operatorname{Ln} f(z)\}$, т. е. h — непрерывная ветвь $\operatorname{Ln} f(z)$.

Докажем регулярность в области G, $h \in C^1(G)$. Рассмотрим произвольную точку $z_1 \in G$.

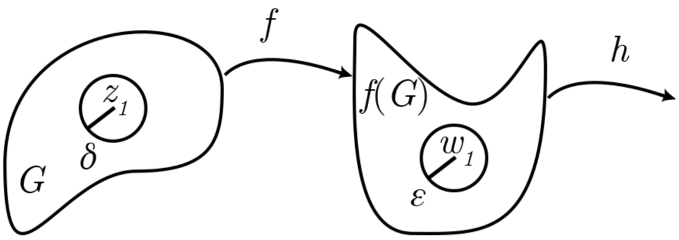

Рис. 10.9.

Пусть $w_1 = f(z_1) \neq 0$. Значит $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(w_1) \not\equiv 0$. Тогда в круге $B_\varepsilon(w_1)$ можно выделить регулярную ветвь h_1 многозначной функции $\operatorname{Ln} f(z)$ (Лекция 9), т. к. в этой области нет замкнутых кривых охватывающих точку ноль.

Т. к. $f(z)$ непрерывна в точке z_1, то $\exists \delta > 0 : f(B_\delta(z_1)) \subset B_\varepsilon(w_1)$. Значит в $B_\delta(z_1)$ можно рассмотреть регулярную ветвь $\operatorname{Ln} f(z) : h_1(f(z)) = \tilde{h}(z)$. В круге $B_\delta(z_1)$ есть две непрерывные ветви $\operatorname{Ln} f(z)$: h и $\tilde{h}$. Значит,

$$\forall z \in B_\delta(z_1), \quad h(z) = \tilde{h}(z) + 2\pi k i,$$

для некоторой константы $k \in \mathbb{Z}$. Т. к. $\tilde{h}$ регулярна в $B_\delta(z_1)$, то $h \in C^1(B_\delta(z_1))$. В силу произвольности выбора точки z_1 получим, что $h \in C^1(G)$. Теорема доказана.

■

Теорема 10.3 (Критерий выделения регулярных ветвей $\sqrt[n]{f(z)}$). *Пусть область $G \subset \mathbb{C}$. Пусть*

$$f \in C^1(G), \quad f(z) \neq 0 \forall z \in G.$$

Тогда в области G можно выделить регулярные ветви $\sqrt[n]{f(z)} \Leftrightarrow \Delta_\Gamma \arg f(z) = 2\pi n k(\Gamma), \quad k(\Gamma) \in \mathbb{Z}$, для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой Γ в области G.

Для доказательства теоремы 10.3 докажем лемму.

Лемма 10.2. *Явный вид регулярной ветви $\sqrt[n]{f(z)}$. Если в области $G \subset \mathbb{C}$ можно выделить регулярную ветвь $g(z)$ функции $\sqrt[n]{f(z)}$, то явный вид функции:*

$$\forall z \in G, \quad g(z) = g(z_0) \sqrt[n]{\left|\frac{f(z)}{f(z_0)}\right|} \mathrm{e}^{\dfrac{i(\Delta_\Gamma \arg f(z))}{n}},$$

где z_0 — фиксированная точка в области G.

□ При доказательстве будем использовать теорему 10.2 и связь между ветвями $\operatorname{Ln} f(z)$ и $\sqrt[n]{f(z)}$.

1) Пусть области G односвязная. Тогда по свойству 10.4 $\Delta_\Gamma \arg f(z) = 0$ для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой Γ в области G. Следовательно по теореме 10.2 получим:

$$h(z) = \ln|f(z)| + i(\varphi_0 + \Delta_\Gamma \arg f(z))$$

одна из регулярных ветвей $\operatorname{Ln} f(z)$ в области G. z_0 — фиксированная точка в области G; $\varphi_0 \in Arg f(z_0)$.

Если рассмотреть функцию

$$\tilde{g}(z) = \mathrm{e}^{\dfrac{h(z)}{n}},$$

то видно, что $\tilde{g}(z)$ — регулярная, т. к. $h \in C^1(G)$, причем

$$\tilde{g}(z) = \sqrt[n]{|f(z)|}\, \mathrm{e}^{\dfrac{i(\varphi_0 + \Delta_\Gamma \arg f(z))}{n}}$$

одна из ветвей $\sqrt[n]{f(z)}$.

Заметим, что для $\tilde{g}$ выполнена формула из условия леммы 10.2.

$$\frac{\tilde{g}(z)}{g(z_0)} = \sqrt[n]{\left|\frac{\tilde{f}(z)}{f(z_0)}\right|} \mathrm{e}^{\dfrac{i(\Delta_\Gamma \arg f(z))}{n}},$$

т. к.

$$\tilde{g}(z_0) = \sqrt[n]{|f(z_0)|}\, \mathrm{e}^{\dfrac{i\varphi 0}{n}}.$$

По теореме 10.1 две непрерывные ветви $g, \tilde{g}$ многозначной функции $\sqrt[n]{f(z)}$ в области G связаны следующим образом:

$$g(z) = \tilde{g}(z)\, \mathrm{e}^{\dfrac{2\pi k i}{n}},$$

где константа $k \in \{0, \dots, n-1\} \forall z \in G$, $\quad\Rightarrow$

$$\frac{g(z)}{g(z_0)} = \sqrt[n]{\left|\frac{f(z)}{f(z_0)}\right|} \mathrm{e}^{\dfrac{i(\Delta_\Gamma \arg f(z))}{n}}.$$

2)Пусть G — произвольная область (необязательно односвязная).

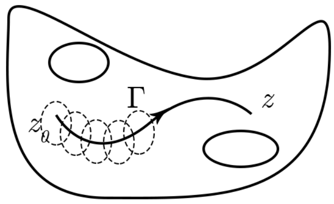

Рис. 10.10.

Пусть z — произвольная точка в области G; Γ — произвольная кусочно-гладкая кривая от z_0 до z в области G. Т. к. Γ — компакт, то существует конечное число открытых кругов: $B_0, B_1, \dots, B_K$ такое, что $\cup B_j \supset \Gamma, B_j \subset G$, причем Γ разбивается на конечное число кривых

$$\Gamma_{\xi_0,\xi_1}, \Gamma_{\xi_1,\xi_2}, \dots, \Gamma_{\xi_i,\xi_{i+1}}, \dots, \Gamma_{\xi_k,\xi_{k+1}},$$

так, что $\Gamma_{\xi_i,\xi_{i+1}} \subset B_j$, $\xi_0, \dots, \xi_{k+1} \in \Gamma$,где $\xi_0 = z_0$, $\xi_{k+1} = z$.

Для каждого $j \in \{0, \dots, k\}$ справедливо: B_j — односвязная область $\Rightarrow$ по пункту 1 этого доказательства для g в B_j выполняется:

$$\frac{g(\xi_{i+1})}{g(\xi_i)} = \sqrt[n]{\left|\frac{f(\xi_{i+1})}{f(\xi_i)}\right|} \mathrm{e}^{\dfrac{i(\Delta_{\Gamma_{\xi_i,\xi_{i+1}}} \arg f)}{n}}.$$

Тогда получим, что

$$\frac{g(\xi_1)}{g(\xi_0)} \frac{g(\xi_2)}{g(\xi_1)} \cdots \frac{g(\xi_{k+1})}{g(\xi_k)} = \sqrt[n]{\left|\frac{f(\xi_1)}{f(\xi_0)} \frac{f(\xi_2)}{f(\xi_1)} \cdots \frac{f(\xi_{k+1})}{f(\xi_k)}\right|}\cdot$$

$$\cdot\, \mathrm{e}^{\dfrac{i(\Delta_{\Gamma_{\xi_0,\xi_1}} \arg f + \Delta_{\Gamma_{\xi_1,\xi_2}} \arg f + \dots + \Delta_{\Gamma_{\xi_k,\xi_{k+1}}} \arg f)}{n}}.$$

Окончательно получим:

$$\frac{g(z)}{g(z_0)} = \sqrt[n]{\frac{f(z)}{f(z_0)}} \mathrm{e}^{\dfrac{i(\Delta_\Gamma \arg f)}{n}}.$$

■

Докажем теорему 10.3.

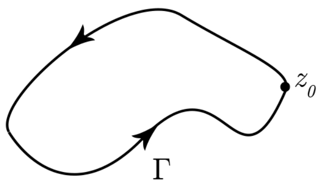

Рис. 10.11.

$\square$ $\boxed{\Rightarrow}$ В области G можно выделить регулярную ветвь $\sqrt[n]{f(z)}$. Пусть Γ — произвольная замкнутая кусочно-гладкая кривая в области G

Выберем $z_0 \in G$. Тогда по лемме 10.2 явный вид функции g в области G:

$$g(z) = g(z_0)\sqrt[n]{\left|\frac{f(z)}{f(z_0)}\right|}\,\mathrm{e}^{\dfrac{i(\Delta_\Gamma \arg f)}{n}},$$

Γ — кривая от z_0 до z в области G. Если взять $z = z_0$, то

$$g(z_0) = g(z_0)\sqrt[n]{\left|\frac{f(z_0)}{f(z_0)}\right|}\,\mathrm{e}^{\dfrac{i(\Delta_\Gamma \arg f)}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{e}^{\dfrac{i(\Delta_\Gamma \arg f)}{n}} = 1$$

Значит,

$$\frac{i\Delta_\Gamma \arg f}{n} = 2\pi i k(\Gamma), \quad k(\Gamma) \in \mathbb{Z}.$$

$$\Delta_\Gamma \arg f = 2\pi i k(\Gamma).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть

$$\Delta_\Gamma \arg f = 2\pi i k(\Gamma), \quad k(\Gamma) \in \mathbb{Z},$$

для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\Gamma \in G$. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z)}\,\mathrm{e}^{\dfrac{i(\varphi_0 + \Delta_\Gamma \arg f(z))}{n}},$$

где z_0 — фиксированная точка в области G; $\varphi_0 \in Argf(z_0)$.

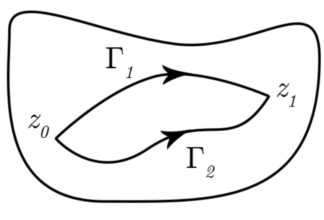

Рис. 10.12.

Т. к. по условию:

$$\Delta_\Gamma \arg f = 2\pi i k(\Gamma), \quad k(\Gamma) \in \mathbb{Z},$$

для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\Gamma \in G$, то

$$\mathrm{e}^{\dfrac{i(\varphi_0 + \Delta_{\Gamma_1} \arg f(z))}{n}} = \mathrm{e}^{\dfrac{i(\varphi_0 + \Delta_{\Gamma_2} \arg f(z) + 2\pi n k(\Gamma))}{n}} =$$

$$= \mathrm{e}^{\dfrac{i(\varphi_0 + \Delta_{\Gamma_2} \arg f(z))}{n}} \underbrace{\mathrm{e}^{2\pi i k(\Gamma)}}_{=1}.$$

Значение $g(z)$ не изменится при выборе разных Γ_1 и Γ_2, т. е. $g(z)$ задано корректно. Из вида g видно, что $g(z) \in \sqrt[n]{f(z)}, \forall z \in G$.

Покажем, что $g(z) \in C^1(G)$. Рассмотрим произвольную точку $z_1 \in G$.

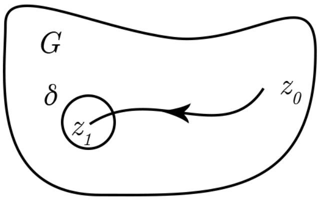

Рис. 10.13.

Пусть $B_\delta(z_1) \subset G$ для некоторого $\delta > 0$. Т. к.

$$\varphi_0 + \Delta_\Gamma \arg f(z) \in Arg f(z),$$

то, если выбрать кривую $\tilde{\Gamma}$ от z_0 до z_1 и выбрать

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta_{\tilde{\Gamma}} \arg f(z) \in Arg f(z_1),$$

то получим:

$$g(z) = \sqrt[n]{|f(z)|}\, \mathrm{e}^{\dfrac{i(\varphi_1 + \Delta_\Gamma \arg f(z))}{n}}, \quad \forall z \in B_\delta(z_1).$$

Т. к. $B_\delta(z_1)$ — односвязная область, то $\Delta_\Gamma \arg f(z) = 0$ для любой замкнутой кривой Γ. Следовательно по теореме 10.2 в $B_\delta(z_1)$ можно выделить регулярную ветвь $\mathrm{Ln}\, f(z)$.

$$h(z) = \ln|f(z)| + i(\varphi_1 + \Delta_{\Gamma_1} \arg f(z)).$$

Где начальный угол был выбран φ_1. Откуда видно, что $\forall \in B_\delta(z_1)$

$$g(z) = \mathrm{e}^{\dfrac{h_(z)}{n}} \text{ — регулярна в } B_\delta(z_1),$$

т. к. $h \in B_\delta(z_1)$.

■