ЛЕКЦИЯ 4

Интегральная формула Коши. Интегралы типа Коши. Степенные ряды

4.1. Интегральная формула Коши

Определение 4.1. Пусть G — область в $\mathbb{C}$, причем ее граница ∂G состоит из гладких кривых $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)$, причем Γ_j и Γ_l при $j \neq l$ могут иметь общими точками только свои концевые точки.

Тогда говорим, что G — область с **кусочно-гладкой границей**.

Причем заметим, что в этом случае граница ∂G состоит из *правильных компонент*, как показано на рисунке 4.1.

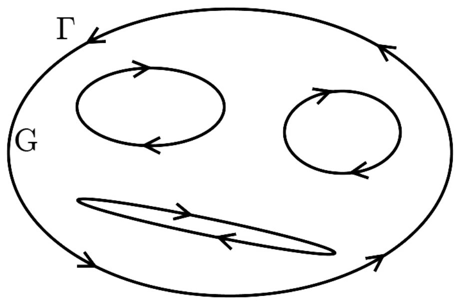

Рис. 4.1.

Необходимо напомнить, что Γ_1 — **разрез**, если:

$$\forall z \in \dot{\Gamma}_j \quad \exists \delta > 0 : \; B_\delta(z) \setminus \Gamma_j \subset G.$$

Теорема 4.1 (**Интегральная формула Коши**). *Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей (см. рис. 4.2). Пусть функция f такова, что:*

$$f \in \mathbb{C}^1(G), \quad f \in \mathbb{C}(\overline{G}).$$

Тогда:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\partial G)^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Суть теоремы 4.1 заключается в восстановлении значений регулярной функции в области по значениям на границе.

О физическом смысле данной теоремы напоминает другое ее называние — теорема о «мыльных пленках».

Докажем данную теорему:

☐ В доказательстве будет использована теорема Коши.

Выберем произвольную точку $z \in G$. Зафиксируем выбранную точку и рассмотрим круг, показанный на рисунке 4.3.

Так как G является областью, то:

$$\exists R > 0 : \; \forall r \in (0, R] \; \overline{B_r(z)} \subset G.$$

Рассмотрим множество:

$$\tilde{G} = G \setminus \overline{B_r(z)}.$$

По теореме Коши для $\tilde{G}$ и $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ можно записать:

$$0 = \int\limits_{(\partial G)^+} \frac{f(z)}{\xi - z}\, dz = \int\limits_{(\partial G)^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \int\limits_{\Gamma_r^-(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

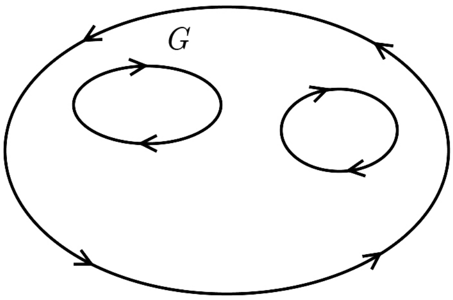

Рис. 4.2.

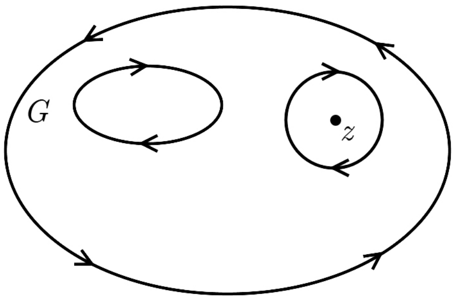

Рис. 4.3.

Далее заметим, что:

$$\int\limits_{(\partial G)^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \int\limits_{\Gamma_r^+(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Отсюда в частности следует, что правая часть равенства не зависит от $r \in (o, R]$ при фиксированной точке z.

Далее рассмотрим выражение:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r^+(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - f(z) \right|.$$

Из соображений, рассмотренных подробно на предыдущей лекции:

$$\int\limits_{\Gamma_r^+(z)} \frac{1}{\xi - z}\, d\xi = 2\pi i,$$

следовательно:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r^+(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Тогда можно переписать выражение:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r^+(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - f(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r^+(z)} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\, d\xi \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(\Gamma_r^+(z)} \frac{|f(\xi) - f(z)|}{|\xi - z|}\, |d\xi|.$$

Так как $f \in \mathbb{C}^1(G)$, то, в частности:

$$f \in \mathbb{C}(G).$$

Тогда для любой точки z из G:

$$\forall z \in G,\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 :\ \forall \xi \in G \quad \left|\xi - z\right| < \delta, \quad \left|f(\xi) - f(z)\right| < \varepsilon.$$

Если выбрать произвольное число $\varepsilon > 0$, то без ограничения общности рассуждений можно считать, что $r \leqslant \delta$. Следовательно, можно продолжить оценку:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{(\Gamma_r^+(z)} \frac{\left|f(\xi) - f(z)\right|}{\left|\xi - z\right|} \left|d\xi\right| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{r} \int\limits_{\Gamma_r(z)} \left|d\xi\right| = \frac{\varepsilon}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \varepsilon,$$

так как:

$$\left|z - \xi\right| = r, \quad \text{и длина } \Gamma_r(z) = 2\pi r.$$

При фиксированной точке z оценивалась сверху разность между двумя комплексными константами. Так как она по модулю больше нуля для любого положительного ε, то константы равны.

Следовательно:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r^+(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} |int_{(\partial G)^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

В силу произвольности выбора точки $r \in G$ теорему можно считать доказанной. ■

Определение 4.2. Пусть Γ — кусочно-гладкая кривая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть функция g — непрерывна на данной кривой Γ:

$$g \in \mathbb{C}(\Gamma).$$

Тогда выражение вида:

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$$

называется **интегралом типа Коши** от g по Γ.

Теорема 4.2. *Пусть Γ — кусочно-шладкая кривая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть функция g — непрерывна на данной кривой Γ:*

$$g \in \mathbb{C}(\Gamma).$$

Тогда функция I (являющаяся интегралом типа Коши) такова, что:

$$I \in \mathbb{C}^\infty\big(\mathbb{C} \setminus \Gamma\big),$$

причем:

$$\forall n \in \big\{0, 1, 2, \dots\big\} \quad I^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \quad \forall z \in G.$$

Суть теоремы — бесконечная дифференцируемость интеграла типа Коши.

Докажем эту теорему:

□ Доказательство будет вестись по индукции с использованием школьного определения производной.

Базой индукции будет доказательство для случая $n = 1$. Рассмотрим точку z (см. рис. 4.4):

$$z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma.$$

Так как Γ является компактом, то расстояние:

$$\rho\big(z, \Gamma\big) = d > 0.$$

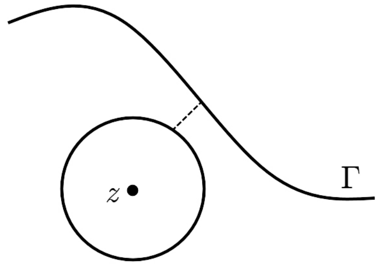

Рис. 4.4.

Далее рассмотрим:

$$B_r(z) \subset \mathbb{C} \setminus \Gamma,$$

где с запасом взято:

$$r = \frac{d}{2}.$$

Распишем тогда для $|\Delta z| < r$:

$$\left| \frac{I(z+\Delta z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} g(\xi) \cdot \left(\left(\frac{1}{\xi - (z+\Delta z)} - \frac{1}{\xi - z} \right) \cdot \frac{1}{\Delta z} - \frac{1}{(\xi - z)^2} \right) d\xi \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} g(\xi) \cdot \left(\frac{(\xi - z) - \big(\xi - (z+\Delta z)\big)}{(\xi - z)\big(\xi - (z+\Delta z)\big)\Delta z} - \frac{1}{(\xi - z)^2} \right) d\xi \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} g(\xi) \cdot \left(\frac{1}{(\xi - z)\big(\xi - (z+\Delta z)\big) - \frac{1}{(\xi - z)^2}} \right) d\xi \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} g(\xi) \cdot \frac{(\xi - z) - \big(\xi - (z+\Delta z)\big)}{(\xi - z)^2\big(\xi - (z+\Delta z)\big)}\, d\xi \right|.$$

Имея в виду, что на Γ выбрана ориентация, проведем оценку:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} g(\xi) \cdot \frac{(\xi - z) - \big(\xi - (z+\Delta z)\big)}{(\xi - z)^2\big(\xi - (z+\Delta z)\big)}\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \big|g(\xi)\big| \cdot \frac{|\Delta z|}{|\xi - z|^2 \cdot \big|\xi - (z+\Delta z)\big|} \big|d\xi\big|, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma.$$

Так как функция g — непрерывна на Γ, то запишем:

$$\exists M > 0 : \ \big|g(\xi)\big| \leqslant M, \quad \forall \xi \in \Gamma.$$

Тогда можно завершить оценку:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \big|g(\xi)\big| \cdot \frac{|\Delta z|}{|\xi - z|^2 \cdot \big|\xi - (z+\Delta z)\big|} \big|d\xi\big| \leqslant \frac{|\Delta z|}{2\pi} \cdot M \cdot \frac{1}{(2r)^2 r} \int\limits_{\Gamma} \big|d\xi\big| \to 0 \quad \text{при } \big|\Delta z\big| \to 0.$$

Таким образом:

$$\exists I'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{I(z+\Delta z) - I(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi,$$

что завершает доказательство базы индукции.

Перейдем к шагу индукции. Если для k-й производной выполнено:

$$I^{(k-1)}(z) = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^k}\, d\xi, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то будем рассматривать разность:

$$\left| \frac{I^{(k-1)}\big(z+\Delta z\big) - I^{(k-1)}(z)}{\Delta z} - \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} \right|.$$

Аналогично случаю $k = 1$, но используя теперь бином Ньютона, проведем дальнейшие рассуждения:

$$(\xi - z)^k - (\xi - z - \Delta z)^k = (\xi - z)^k - \Big((\xi - z)^k - k(\xi - z)^{k-1} \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z) \Big),$$

где, как и на предыдущих лекциях:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} = 0.$$

В итоге получим, что:

$$\exists I^{(k)}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{I^{(k-1)}(z+\Delta z) - I^{(k-1)}(z)}{\Delta z} = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\, d\xi,$$

что и требовалось доказать. ■

Следствие 4.1. *Если G — область в $\mathbb{C}$, а функция f — регулярна в области G, то есть:*

$$f \in \mathbb{C}^1(G),$$

то:

$$f \in \mathbb{C}^\infty(G).$$

☐ В доказательстве будет использована теорема 4.2 для окрестности произвольной точки z из G.

Рассмотрим произвольную область $G \subset \mathbb{C}$ (см. рис. 4.5). Так как G является областью, то:

$$\exists r > 0 : \ \overline{B_r(z)} \subset G.$$

По теореме 4.1 можно записать:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r^+(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi,$$

так как:
$$f \in \mathbb{C}^1\big(B_r(a)\big), \quad f \in \mathbb{C}\Big(\overline{B_r(z)}\Big).$$

Так как получился интеграл типа Коши, то у него существует производная любого порядка $k \in \mathbb{N}$, то есть, по теореме 4.2:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r^+(z)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\, d\xi.$$

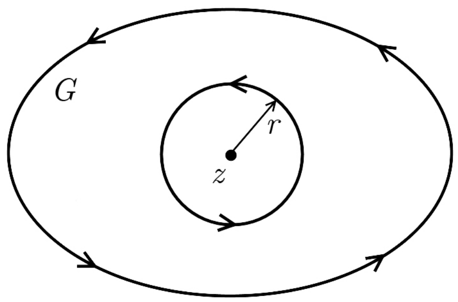

Рис. 4.5.

Осталось сказать, что в силу произвольности выбора точки $z \in G$ существует производная:
$$\exists f^{(k)}(z), \quad \forall z \in G,\ \forall k \in \mathbb{N},$$
что завершает доказательство данного следствия. ■

4.2. Степенные ряды

Определение 4.3. Степенным рядом называется ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n, a \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.1}$$

Очень важным вопросом в данной теме является вопрос о том, в каких точках степенной ряд сходится.

Теорема 4.3 (Абеля). *Пусть степенной ряд* (4.1) *сходится в точке* $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Тогда (см. рис. 4.6):

1) $\forall z \in B_{|a-z_0|}(a)$ *степенной ряд* (4.1) *— абсолютно сходится в точке* z.

2) На любой компоненте, лежащей внутри данного круга:

$$\forall r \in \big(0, |a - z_0|\big)$$

степенной ряд (4.1) *— сходится равномерно на* $\overline{B_r(a)}$.

□ В доказательстве используется признак сравнения (для доказательства первой части теоремы) и признак Вейерштрасса (для второй части).

Первая часть. Так как степенной ряд (4.1) — сходится в точке z_0, то (по необходимому условию сходимости ряда):

$$\left|c_n(z_0-a)^n\right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

В частности:

$$\exists M > 0 : \left|c_n(z_0-a)^n\right| \leqslant M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

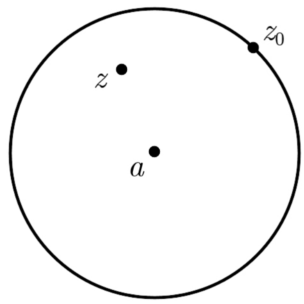

Рис. 4.6.

Пусть точка z:

$$z \in B_{|z_0-a|}(a).$$

Тогда проведем следующую оценку:

$$\left|c_n(z-a)^n\right| = \left|c_n(z_0-a)^n\right| \cdot \left|\left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n\right|.$$

Так как:

$$\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right| = q(z) < 1,$$

то можно записать:

$$\left|c_n(z_0-a)^n\right| \cdot \left|\left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n\right| \leqslant M\big(q(z)\big)^n.$$

Далее, так как числовой ряд:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M\big(q(z)\big)^n$$

сходится как геометрическая прогрессия, то (по признаку сравнения сходящегося ряда):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n.$$

Вторая часть. Если взять:

$$r \in \big(0, |z_0-a|\big),$$

то можно записать:

$$\forall z \in \overline{B_r(a)} : \left|c_n(z-a)^n\right| = \left|c_n(z_0-a)^n\right| \cdot \frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n}.$$

Так как:

$$\frac{|z-a|}{|z_0-a|} \leqslant \frac{r}{|z_0-a|} = q < 1,$$

то:

$$\left|c_n(z_0-a)^n\right| \cdot \frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n} \leqslant Mq^n.$$

Следовательно, по признаку Вейерштрасса степенной ряд (4.1) — сходится равномерно на $\overline{B_r(a)}$, что и требовалось доказать. ■

Для степенного ряда (4.1) определим число:

Определение 4.4. Радиусом сходимости называется число:

$$R = \sup\Big\{|z-a|,\ \text{где } z \text{ — точки, в которых степенной ряд сходится}\Big\}.$$

Нетрудно видеть, что:

$$R \in [0, +\infty].$$

Из определения 4.4 следует, что:

1) В любой точке z (см. рис. 4.7) такой, что:

$$\forall z \in B_r(a)$$

степенной ряд (4.1) — сходится в z.
Это следует из теоремы Абеля и определения 4.4.

2) В любой точке z' такой, что:

$$\forall z' \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_r(a)}$$

степенной ряд (4.1) — расходится.
Это следует напрямую из определения 4.4.

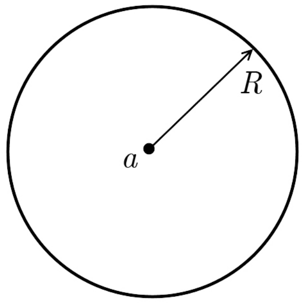

Рис. 4.7.

Замечание 4.1. Известна также **формула Коши – Адамара**:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

В данном замечании не исключено, что:

$$\frac{1}{0} = +\infty, \quad \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Пример 4.1. Посчитать сумму геометрической прогрессии, найти радиус сходимости для ряда:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

<u>Решение:</u> рассмотрим частичные суммы:

$$S_n = 1 + z + \dots + z^N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \to \frac{1}{1-z}, \quad N \to +\infty, \quad z \neq 1, \quad |z| < 1,$$

то есть:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \to \frac{1}{1-z} \text{ при } |z| < 1,$$

и следовательно, радиус сходимости:

$$R_{\text{сх}} \geqslant 1.$$

С другой стороны, при $z = 1$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ — расходится, следовательно:

$$R_{\text{сх}} \leqslant 1.$$

Окончательно получим:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \to \frac{1}{1-z}, \quad R_{\text{сх}} = 1.$$

Теорема 4.4. *Пусть функция f такова, что:*

$$f \in \mathbb{C}^1\Big(B_r(a)\Big).$$

Тогда:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad \forall z \in B_R(a),$$

где:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Суть теоремы заключается в том, что эта теорема говорит о разложении регулярной функции в степенной ряд.

Для доказательства данной теоремы понадобится сформулировать и доказать следующую лемму:

Лемма 4.1. *Пусть* Γ *— кусочно-гладкая кривая в* $\mathbb{C}$*. Пусть есть функция:*

$$f_n(z) \in \mathbb{C}(\Gamma),$$

причем:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) \rightrightarrows f(z).$$

Тогда:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_\Gamma f_n(z)\,dz = \int\limits_\Gamma \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)\,dz = \int\limits_\Gamma f(z)\,dz.$$

Суть данной леммы в том, что она говорит об интегрировании вдоль кривой равномерно сходящегося ряда.

Докажем эту лемму:

□ В доказательстве будет использоваться равномерная сходимость и оценка разности интегралов от f и от частичных сумм.

Рассмотрим частичные суммы:

$$S_n(z) = f_1(z) + \cdots + f_N(z), \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Проведем оценку:

$$\left| \int\limits_\Gamma f(z)\,dz - \sum_{n=1}^{R} \int\limits_\Gamma f_n(z)\,dz \right| = \left| \int\limits_\Gamma f(z)\,dz - \int\limits_\Gamma \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) \right) dz \right| =$$
$$= \left| \int\limits_\Gamma \Big(f(z) - S_N(z) \Big)\,dz \right| \leqslant \int\limits_\Gamma \Big| f(z) - S_N(z) \Big| \cdot |dz|.$$

Так как на Γ:

$$S_N(z) \rightrightarrows f(z), \quad N \to +\infty,$$

то:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall N \geqslant N_1 \quad \Big| S_N(z) - f(z) \Big| < \varepsilon, \quad \forall z \in \Gamma.$$

Если для произвольного положительного ε выбрать соответствующее число N, то можно продолжить оценку:

$$\int\limits_{\Gamma} \Big| f(z) - S_N(z) \Big| \cdot \big| dz \big| \leqslant \varepsilon \int\limits_{\Gamma} \big| dz \big| = \varepsilon l(\Gamma),$$

где $l(\Gamma)$ — длина кривой.

Таким образом:

$$\sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\Gamma} f_n(z)\, dz \to \int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz, \quad N \to +\infty.$$

Окончательно получим:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_{\Gamma} f_n(z)\, dz = \int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz,$$

что и требовалось доказать. ■

Теперь можно приступать к доказательству теоремы 4.4:

□ В доказательстве используется интегральная формула Коши (теорема 4.1).

Для произвольной точки z возьмем число (см. рис. 4.8):

$$z \in B_R(a), \quad r \in \Big(|z-a|, R \Big).$$

Тогда:

$$\overline{B_r(a)} \subset B_R(a),$$

причем:

$$z \in B_r(a),$$

то есть точка z отделена от границы.

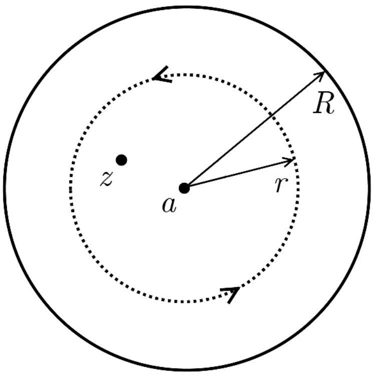

Рис. 4.8.

Для функции f и для области $B_r(a)$ по интегральной формуле Коши можно записать:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r^+(a)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, dz.$$

Рассмотрим:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)} = \frac{1}{\xi - a} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)}.$$

Так как:

$$\left| \frac{z-a}{\xi - a} \right| < 1 \text{ при } \xi \in B_r(a),$$

то можно записать:

$$\frac{1}{\xi - a} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)} = \frac{1}{\xi - a} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi - a)^n}.$$

Выходит:

$$f(z) = \int\limits_{\Gamma_r^+(a)} \left(\frac{f(\xi)}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} \right) d\xi.$$

Так как функция f — непрерывна на $\Gamma_r^+(a)$, то она — ограничена, то есть:

$$\exists M > 0 : \ \left|f(\xi)\right| \leqslant M, \quad \xi \in \Gamma_r^+(a).$$

Оценим при фиксированной точке z:

$$\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| = q < 1.$$

Следовательно, ряд под интегралом оценивается на Γ по модулю сверху сходящимся числовым рядом:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Mq^n}{r \cdot 2\pi},$$

так как:

$$\left|\xi - a\right| = r.$$

По признаку Вейерштрасса ряд равномерно сходится на Γ, а значит, что по лемме 4.1:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int\limits_{\Gamma_r^+(a)} \frac{f(\xi)(z-a)^n}{2\pi i(\xi-a)^{n+1}}\, d\xi \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (z-a)^n \cdot \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r^+(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\, d\xi \right).$$

По теореме о дифференцируемости интеграла типа Коши можно записать:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r^+(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\, d\xi,$$

следовательно:

$$\int\limits_{\Gamma_r^+(a)} \frac{1}{(\xi-a)^{n+1}}\, d\xi = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

что и требовалось доказать. ■