

## ЛЕКЦИЯ 12

**Момент импульса. Собственные значения и собственные функции момента импульса**

На прошлой лекции было установлено, что оператор  $\hat{L}^2$  коммутирует со всеми проекциями оператора момента количества движения:

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0.$$

Следовательно, у операторов  $\hat{L}^2$  и  $\hat{L}_z$  должны существовать общие собственные состояния  $|\lambda, \mu\rangle$ :

$$\begin{cases} \hat{L}_z |\lambda, \mu\rangle = \mu |\lambda, \mu\rangle \\ \hat{L}^2 |\lambda, \mu\rangle = \lambda |\lambda, \mu\rangle, \end{cases} \quad (12.1)$$

где  $\lambda$  — собственное значение квадрата момента количества движения;

$\mu$  — собственное значение оператора проекции момента количества движения на координатную ось  $z$ .

Размерность момента импульса совпадает с размерностью действия:

$$[L] = [\hbar],$$

поэтому удобно ввести безразмерный оператор момента количества движения:

$$\hat{L} \rightarrow \frac{\hat{L}}{\hbar}.$$

В дальнейшем под  $\hat{L}$  будем подразумевать именно безразмерную величину. Условие коммутации для различных компонент оператора момента количества движения было получено на предыдущей лекции:

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_k] = ie_{ikl} \hat{L}_l.$$

Найдем среднее значение оператора  $\hat{L}^2$ :

$$\overline{\hat{L}^2} = \langle \lambda, \mu | \hat{L}^2 | \lambda, \mu \rangle = \overline{\hat{L}_x^2} + \overline{\hat{L}_y^2} + \overline{\hat{L}_z^2} = \overline{\hat{L}_x^2} + \overline{\hat{L}_y^2} + \mu^2,$$

согласно второму уравнению в (12.1).

Поскольку  $\hat{L}_x$  и  $\hat{L}_y$  — эрмитовы операторы, то

$$\overline{\hat{L}_x^2} \geq 0, \quad \overline{\hat{L}_y^2} \geq 0.$$

С другой стороны, согласно первому уравнению в (12.1)

$$\overline{\hat{L}^2} = \lambda. \quad (12.2)$$

Следовательно, согласно (12.2) должно выполняться следующее соотношение:

$$\mu^2 \leq \lambda \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{\lambda} \leq \mu \leq \sqrt{\lambda}. \quad (12.3)$$

## Лекция 12. Момент импульса, его собственные значения и собственные функции

Введем оператор  $\hat{L}_+$  следующим образом:

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y,$$

и эрмитово сопряженный к нему:

$$\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y.$$

Подействуем оператором  $\hat{L}_+$  на собственное состояние  $|\lambda, \mu\rangle$ . В результате получим вектор, который будет являться собственным вектором операторов  $\hat{L}^2$  и  $\hat{L}_z$ :

$$\hat{L}^2(\hat{L}_+|\lambda, \mu\rangle) = \hat{L}_+\hat{L}^2|\lambda, \mu\rangle = \lambda\hat{L}_+|\lambda, \mu\rangle,$$

поскольку  $\hat{L}^2$  коммутирует и с  $\hat{L}_x$  и с  $\hat{L}_y$ , то есть возможны перестановки.

Подействуем оператором  $\hat{L}_z$  на тот же самый вектор:

$$\hat{L}_z(\hat{L}_+|\lambda, \mu\rangle). \quad (12.4)$$

Согласно условиям коммутации:

$$\begin{aligned} \hat{L}_z\hat{L}_x &= \hat{L}_x\hat{L}_z + ie_{312}\hat{L}_y \\ \hat{L}_z\hat{L}_y &= \hat{L}_y\hat{L}_z + ie_{321}\hat{L}_x \end{aligned}$$

Следовательно, выражение (12.4) примет вид:

$$\begin{aligned} \hat{L}_z(\hat{L}_+|\lambda, \mu\rangle) &= \{\hat{L}_x\hat{L}_z + ie_{312}\hat{L}_y + i(\hat{L}_y\hat{L}_z + ie_{321}\hat{L}_x)\} = \\ &= \{(\hat{L}_x + i\hat{L}_y)\hat{L}_z + (\hat{L}_x + i\hat{L}_y)\}|\lambda, \mu\rangle = (\mu + 1)(\hat{L}_+|\lambda, \mu\rangle). \end{aligned}$$

Таким образом, вектор  $\hat{L}_+|\lambda, \mu\rangle$  является собственным вектором оператора  $\hat{L}_z$ , принадлежащим на единицу большему собственному значению.

Таким образом, оператор  $\hat{L}_+$  можно назвать **повышающим оператором**:

$$\hat{L}_+|\lambda, \mu\rangle = C|\lambda, \mu + 1\rangle. \quad (12.5)$$

Аналогично можно показать, что оператор  $\hat{L}_-$  — **понижающий оператор**:

$$\hat{L}_-|\lambda, \mu\rangle = D|\lambda, \mu - 1\rangle. \quad (12.6)$$

Возьмем некоторый собственный вектор  $|\lambda, \mu\rangle$ . Подействовав на него один раз оператором  $\hat{L}_+$ , получим собственное состояние  $|\lambda, \mu + 1\rangle$ . Подействовав на получившийся собственный вектор оператором  $\hat{L}_+$  еще раз, получим состояние  $|\lambda, \mu + 2\rangle$ , и так далее:

$$|\lambda, \mu\rangle \xrightarrow{\hat{L}_+} |\lambda, \mu + 1\rangle \xrightarrow{\hat{L}_+} |\lambda, \mu + 2\rangle \xrightarrow{\hat{L}_+} \dots$$

Согласно (12.3), невозможно перейти состояние:

$$\mu > \sqrt{\lambda},$$

и, следовательно, должно существовать значение

$$\mu_{max} \leq \sqrt{\lambda},$$

такое, что выполняется следующее соотношение:

$$|\lambda, \mu_{max}\rangle \neq 0, \quad \hat{L}_+ |\lambda, \mu_{max}\rangle = 0. \quad (12.7)$$

Следовательно, состояния  $|\lambda, \mu_{max} + 1\rangle$ , отличного от нуля, не существует. Применим к (12.7) понижающий оператор:

$$\hat{L}_- \hat{L}_+ |\lambda, \mu_{max}\rangle = (\hat{L}_x - i\hat{L}_y)(\hat{L}_x + i\hat{L}_y) |\lambda, \mu_{max}\rangle = (\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - i[\hat{L}_y, \hat{L}_x]) |\lambda, \mu_{max}\rangle. \quad (12.8)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = \hat{L}^2 &\Rightarrow \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 \\ [\hat{L}_y, \hat{L}_x] = ie_{213}\hat{L}_z = -i\hat{L}_z, \end{aligned}$$

то выражение (12.8) примет следующий вид:

$$\hat{L}_- \hat{L}_+ |\lambda, \mu_{max}\rangle = (\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hat{L}_z) |\lambda, \mu_{max}\rangle = (\lambda - \mu_{max}^2 - \mu_{max}) |\lambda, \mu_{max}\rangle = 0 \quad (12.9)$$

Следовательно, поскольку собственный вектор  $|\lambda, \mu_{max}\rangle$  ненулевой, то

$$\lambda - \mu_{max}^2 - \mu_{max} = 0. \quad (12.10)$$

Обозначим величину  $\mu_{max}$  (максимальное значение проекции) следующим образом:

$$\mu_{max} = 0,$$

тогда из выражения (12.10) следует, что

$$\lambda = l^2 + l = l(l+1).$$

Действуя аналогичным образом достаточно большое число раз оператором  $\hat{L}_-$  на состояние  $|\lambda, \mu\rangle$ , согласно (12.3), нельзя перейти значение  $-\sqrt{\lambda}$ :

$$|\lambda, \mu\rangle \xrightarrow{\hat{L}_-} |\lambda, \mu-1\rangle \xrightarrow{\hat{L}_-} |\lambda, \mu-2\rangle \xrightarrow{\hat{L}_-} \dots$$

Следовательно, для того, чтобы значений проекции, меньших некоторого  $\mu_{min}$ , не существовало, должно выполняться условие:

$$\hat{L}_- |\lambda, \mu_{min}\rangle = 0.$$

Умножив обе части этого выражения слева на  $\hat{L}_+$ , получим:

$$\hat{L}_+ \hat{L}_- |\lambda, \mu_{min}\rangle = (\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 + \hat{L}_z) |\lambda, \mu_{min}\rangle = 0,$$

и, следовательно,

$$\lambda - \mu_{min}^2 + \mu_{min} = 0 \Rightarrow \lambda = \mu_{min}^2 - \mu_{min}.$$

Сравнивая это выражение с (12.10) увидим, что, поскольку значение  $\lambda$  не меняется:

$$\mu_{min} = -\mu_{max} = -l.$$

Таким образом, минимальное значение проекции равно  $-l$  (см. рис. 12.1). Подействовав повышающим оператором  $\hat{L}_+$  на нижнее значение, повысим его на единицу.

Подействовав снова повышающим оператором на нижнее значение, повысим его еще на единицу, и так далее. Пусть за  $n$  шагов будет достигнута величина  $l$ , тогда:

$$l = -l + n \Rightarrow l = \frac{n}{2}.$$

Следовательно, если  $n$  — четное, то все проекции целые, а если нечетное, то все проекции полуцелые величины. Все состояния на рисунке 12.1 принадлежат собственному значению

$$\lambda = l(l+1),$$

причем число этих состояний равно:

$$r = n + 1 = 2l + 1.$$

Таким образом, каждому собственному значению квадрата момента количества движения  $\lambda$  будут соответствовать  $2n + 1$  состояний с различными проекциями. Следовательно, не решая никаких уравнений, удалось получить вполне определенные выводы. На самом деле, получить собственные значения удалось в предположении, что норма векторов должна быть конечной.

Определим значения коэффициентов  $C$  и  $D$  в соотношениях (12.5) и (12.6). Для этого найдем скалярное произведение векторов в левой и правой части (12.5) с самими собой. Будем считать при этом, что вектор состояния  $|\lambda, \mu\rangle$  нормирован на единицу.

Перейдем предварительно к новым обозначениям, производя следующую замену:

$$\lambda \rightarrow l$$

в векторе состояния  $|\lambda, \mu\rangle$ :

$$|\lambda, \mu\rangle \rightarrow |l, \mu\rangle.$$

В этом случае:

$$\langle l, \mu | \hat{L}_+ | \hat{L}_+ | l, \mu \rangle = \langle l, \mu | \hat{L}_- \hat{L}_+ | l, \mu \rangle = \langle l, \mu | C^2 | l, \mu \rangle = |C|^2.$$

Согласно (12.9):

$$\langle l, \mu | \hat{L}_- \hat{L}_+ | l, \mu \rangle = \langle l, \mu | \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hat{L}_z | l, \mu \rangle = (l(l+1) - \mu^2 - \mu) \langle l, \mu | l, \mu \rangle.$$

Снова считая норму равной единице

$$\langle l, \mu | l, \mu \rangle = 1,$$

получим

$$l(l+1) - \mu^2 - \mu = |C|^2 = l^2 - \mu^2 + l - \mu = (l - \mu)(l + \mu + 1).$$

Фазу всегда можно выбрать так, чтобы величина  $C$  была действительна, поэтому:

$$C = \sqrt{(l - \mu)(l + \mu + 1)}.$$

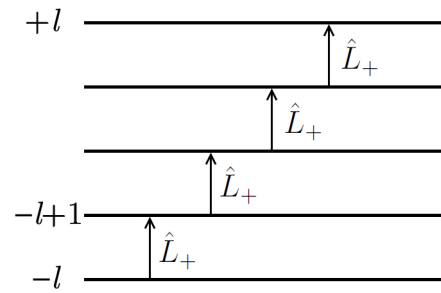


Рис. 12.1.

Действуя аналогичным образом, можно получить значения коэффициента  $D$  в (12.6), однако в этом нет необходимости. Пользуясь выражением для коэффициента  $C$ , можно определить матричные элементы операторов  $\hat{L}_x$  и  $\hat{L}_y$

$$(\hat{L}_x + i\hat{L}_y)|l, \mu\rangle = C|l, \mu + 1\rangle,$$

следовательно, отличен от нуля будет только следующий матричный элемент:

$$\langle l, \mu + 1 | (\hat{L}_x + i\hat{L}_y) | l, \mu \rangle = \sqrt{(l - \mu)(l + \mu + 1)}. \quad (12.11)$$

Для оператора  $\hat{L}_-$  отличным от нуля будет только матричный элемент:

$$\langle l, \mu - 1 | (\hat{L}_x - i\hat{L}_y) | l, \mu \rangle,$$

поскольку

$$(\hat{L}_x - i\hat{L}_y)|l, \mu\rangle = D|l, \mu - 1\rangle.$$

Следовательно, матричный элемент

$$\langle l, \mu + 1 | (\hat{L}_x - i\hat{L}_y) | l, \mu \rangle = 0. \quad (12.12)$$

Складывая выражения (12.11) и (12.12), получим выражение для матричного элемента оператора  $\hat{L}_x$ :

$$\begin{aligned} \langle l, \mu + 1 | 2\hat{L}_x | l, \mu \rangle &= \sqrt{(l - \mu)(l + \mu + 1)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle l, \mu + 1 | \hat{L}_x | l, \mu \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{(l - \mu)(l + \mu + 1)} \end{aligned} \quad (12.13)$$

Матричный элемент, в котором бра-вектор равен  $\langle l, \mu |$ , а кет-вектор —  $|l, \mu + 1\rangle$ , должен быть комплексно сопряжен с (12.13), то есть не изменится:

$$\langle l, \mu | \hat{L}_x | l, \mu + 1 \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{(l - \mu)(l + \mu + 1)}.$$

Выражение для матричного элемента  $\hat{L}_y$  можно получить, вычтя из (12.11) выражение (12.12):

$$\begin{aligned} \langle l, \mu + 1 | 2i\hat{L}_y | l, \mu \rangle &= \sqrt{(l - \mu)(l + \mu + 1)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle l, \mu + 1 | \hat{L}_y | l, \mu \rangle &= -\frac{i}{2} \sqrt{(l - \mu)(l + \mu + 1)} \end{aligned}$$

Так как эта величина чисто мнимая, то матричный элемент, в котором бра и кет-вектора поменяны местами, примет вид:

$$\langle l, \mu | \hat{L}_y | l, \mu + 1 \rangle = \frac{i}{2} \sqrt{(l - \mu)(l + \mu + 1)} = -\langle l, \mu + 1 | \hat{L}_y | l, \mu \rangle.$$

Найдем матричный элемент оператора  $\hat{L}_z$ . Поскольку

$$\hat{L}_z |l, \mu\rangle = \mu |l, \mu\rangle,$$

то оператор  $\hat{L}_z$  имеет только диагональные матричные элементы:

$$\langle l, \mu | \hat{L}_z | l, \mu \rangle = \mu.$$

Рассмотрим некоторый частный случай. Пусть

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{1}{2}.$$

В этом случае матрица оператора  $\hat{L}_z$  примет вид:

$$\hat{L}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрицы операторов  $\hat{L}_x$  и  $\hat{L}_y$  в этом частном случае определяются следующими соотношениями:

$$\hat{L}_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{L}_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Кратность вырождения в этом случае равна 2. Если

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad l = 1.$$

В этом случае

$$\hat{L}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Казалось бы, поскольку

$$\mu_{\max} = l,$$

то оператору  $\hat{L}$  соответствует момент  $l$ , а оператору  $\hat{L}^2$  должен соответствовать момент  $l^2$  (см. рис. 12.2).

Однако, ранее было получено, что

$$\hat{L}^2 \rightarrow l^2 + l. \quad (12.14)$$

Напомним, что

$$\overline{\hat{L}^2} = \overline{\hat{L}_x^2} + \overline{\hat{L}_y^2} + l^2.$$

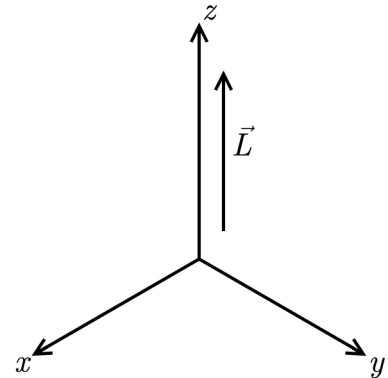


Рис. 12.2.

На прошлой лекции было получено, что

$$\overline{\hat{L}_x} = \overline{\hat{L}_y} = 0.$$

Следовательно, дисперсия этих величин имеет вид:

$$\delta L_x^2 = \overline{L_x^2}, \quad \delta L_y^2 = \overline{L_y^2}.$$

С одной стороны,

$$\delta L_x^2 \cdot \delta L_y^2 \geq \frac{1}{4} \overline{L_z^2} = \frac{1}{4} l^2.$$

С другой стороны, среднее арифметическое всегда не меньше среднего геометрического:

$$\frac{\overline{\hat{L}_x^2} + \overline{\hat{L}_y^2}}{2} \geq \sqrt{\overline{\hat{L}_x^2} \cdot \overline{\hat{L}_y^2}} > \frac{1}{2} l \quad \Rightarrow \quad \overline{\hat{L}_x^2} + \overline{\hat{L}_y^2} \geq l.$$

Именно это добавочное значение  $l$  появляется в (12.14). Следовательно, на рисунке 12.2  $L_{max}$  изображено неверно: существует узкий конус, причем  $L_{max}$  — его образующая (см. рис. 12.3).

Таким образом, выражения для возможных собственных значений проекций момента и квадрата момента были получены без использования явных выражений, получающихся при рассмотрении момента как элемента оператора вращения. После поворота

$$\Psi'(\vec{r}) = \hat{R}_{\delta\varphi}\Psi(\vec{r}),$$

где оператор поворота на бесконечно малый угол  $\hat{R}_{\delta\varphi}$  имеет вид:

$$\hat{R}_{\delta\varphi} = 1 + \frac{i}{\hbar}\delta\varphi\hat{\vec{L}}. \quad (12.15)$$

При введении оператора вращения математический аппарат помогает нам даже в тех случаях, которые не были рассмотрены в физической модели. Формула (12.15) может описать не только орбитальный момент:

$$\hat{\vec{L}} = [\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}], \quad (12.16)$$

но и собственный момент (спин) частицы.

При небольшом изменении формулы (12.15), когда под оператором  $\hat{\vec{L}}$  подразумевается не только орбитальный момент частицы, но сумму орбитального и собственного момента количества движения частицы, эта формула позволяет получить квантовомеханическое описание спина.

Если максимальное значение проекции равно  $1/2$ , то в этом случае спин частицы равен  $\hbar/2$ . Получим из явного выражения для оператора момента (12.16) собственные функции в координатном представлении, отвечающие собственным значениям проекции момента на ось  $z$  и квадрата момента количества движения.

Будем пользоваться сферической системой координат (см. рис. 12.4):

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Поскольку

$$\hat{L}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x,$$

то выражение операторов  $\hat{p}_y$  и  $\hat{p}_x$  в сферической системе координат потребовало бы элементарных, но трудоемких математических преобразований.

Можно поступить другим способом — рассмотреть функцию  $\Psi$ , зависящую от сферических координат:

$$\Psi = \Psi(r, \theta, \varphi).$$

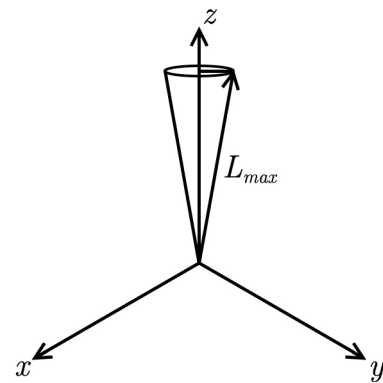


Рис. 12.3.

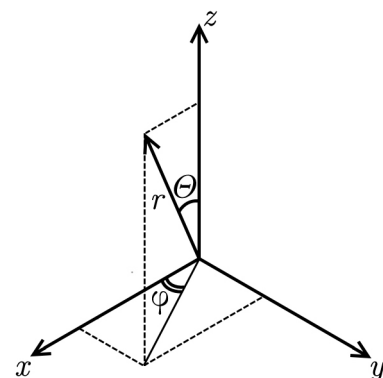


Рис. 12.4.

При повороте системы на угол  $\delta\varphi$ :

$$\Psi(r, \theta, \varphi + \delta\varphi) = \Psi(r, \theta, \varphi) + \delta\varphi \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \left(1 + \delta\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \Psi$$

С другой стороны, по определению оператора поворота:

$$\Psi(r, \theta, \varphi + \delta\varphi) = \left(1 + \frac{i}{\hbar} \delta\varphi \hat{L}_z\right) \Psi.$$

Сравнивая два последних выражения, легко получить выражение для оператора  $\hat{L}_z$ :

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Найдем собственные значения оператора  $\hat{L}_z$ :

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \mu \Psi \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \frac{i}{\hbar} \mu \delta\varphi,$$

и, следовательно:

$$\Psi = \Phi(r, \theta) e^{\frac{i}{\hbar} \mu \varphi}.$$

Функция  $\Psi$ , выраженная таким образом, является собственной функцией проекции момента. Зависимость от угла  $\varphi$  в сферической системе координат, где

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

выражается экспонентой с мнимым показателем.

При повороте на  $2\pi$  значение не должно измениться, поскольку, согласно I постулату, вектор состояния должен быть однозначный:

$$e^{\frac{i}{\hbar} \mu (\varphi + 2\pi)} = e^{\frac{i}{\hbar} \mu \varphi} \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{i}{\hbar} \mu \cdot 2\pi} = 1.$$

Это условие будет выполняться только в том случае, когда величина  $\mu$  составляет целое число постоянных Планка:

$$\mu = m\hbar, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, проекция орбитального момента количества движения (связанного с движением частицы по некоторой орбите) обязательно должна быть целым числом. В выводе, полученном ранее, однако, проекция могла принимать как целые, так и полуцелые значения.

Рассмотрим теперь оператор квадрата момента импульса. Вывод внешнего вида этого оператора довольно длительная работа, не будем приводить его на лекции. Оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi},$$

где  $\Delta_{\theta, \varphi}$  — угловая часть оператора Лапласа.



Угловая часть оператора Лапласа записывается следующим образом:

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Оператор  $\hat{L}^2$  (не безразмерный) записывается с использованием угловой части оператора Лапласа следующим образом:

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\theta,\varphi}, \quad (12.17)$$

то есть величина  $\Delta_{\theta,\varphi}$ , взятая с обратным знаком — значение безразмерного оператора момента количества движения.

Оператор  $\hat{L}^2$  коммутирует с  $\hat{L}_z$ , поэтому:

$$-\hbar^2 \Delta_{\theta,\varphi} \Theta(\theta) e^{im\varphi} = \lambda \Theta(\theta) e^{im\varphi}, \quad (12.18)$$

то есть действие угловой части оператора Лапласа на  $e^{im\varphi}$  возвращает ту же функцию  $e^{im\varphi}$  с некоторым коэффициентом, поэтому на нее можно сократить.

Тогда получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{d\Theta}{d\theta} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \Theta = -\frac{\lambda}{\hbar^2} \Theta. \quad (12.19)$$

Коммутируемость операторов  $\hat{L}^2$  и  $\hat{L}_z$  выражается в том, что при подстановке  $e^{im\varphi}$  в (12.17) удовлетворяются одновременно соотношения и для  $\hat{L}_z$ , и для  $\Theta$ .

Рассмотрим асимптотическое решение уравнения (12.19). Величина угла  $\theta$  изменяется от 0 до  $\pi$  (см. рис. 12.5). Сингулярность в уравнении (12.19) проявляется именно на концах отрезка.

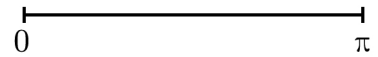


Рис. 12.5.

При

$$\theta \rightarrow 0$$

уравнение (12.19) принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta} \frac{d\Theta}{d\theta} - \frac{m^2}{\theta^2} \Theta = 0, \quad (12.20)$$

поскольку правой частью можно пренебречь по сравнению с  $m^2/\theta^2$ .

Решение дифференциального уравнения (12.20) можно искать в следующем виде:

$$\Theta = c\theta^\nu.$$

Умножив предварительно уравнение (12.20) на  $\theta^2$  слева и справа, получим:

$$\theta^2 \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \theta \frac{d\Theta}{d\theta} - m^2 \Theta = 0 \quad \Rightarrow \quad (\nu(\nu - 1) + \nu - m^2) c\theta^\nu = 0.$$

Следовательно, это условие примет следующий вид:

$$\nu^2 - m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu^2 = m^2,$$

то есть существует два решения с положительным и отрицательным  $m$  соответственно:

$$\Theta = C_1 \theta^{|m|} + C_2 \frac{1}{\theta^{|m|}}, \quad \theta \rightarrow 0. \quad (12.21)$$

От второго члена в выражении (12.21) можно избавиться, положив

$$C_2 = 0.$$

На правом конце, где  $\theta = \pi$ , снова будет наблюдаться сингулярность, поскольку

$$\sin \pi = 0.$$

На правом конце решение будет иметь вид:

$$\Theta = B_1 (\pi - \theta)^{|m|} + B_2 \frac{1}{(\pi - \theta)^{|m|}},$$

и, следовательно, поскольку на левом конце  $C_2 = 0$ , может получиться так, что величина:

$$B_2 \neq 0.$$

Потребовав отсутствие сингулярности на обоих концах («закрепив оба конца»), сможем определить величину  $\lambda$  в выражении (12.18).

Регулярное решение на обоих концах будет существовать, если

$$\frac{\lambda}{\hbar^2} = l(l+1), \quad |m| \leq l.$$

В отличие от матричного рассмотрения, где величины  $l$  и  $m$  могли быть полуцелыми, в данном случае  $l$  и  $m$  — целые числа. В курсе математического анализа изучались полиномы Лежандра

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l.$$

Решение уравнения (12.19) можно записать с помощью присоединенных полиномов Лежандра:

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad x = \cos \theta.$$

В этом случае

$$(1 - x^2)^{\frac{|m|}{2}} = (\sin^2 \theta)^{\frac{|m|}{2}} = (\sin \theta)^{|m|} \approx \theta^{|m|}$$

при малых углах  $\theta$ .

Рассмотрим, что произойдет при переходе к классической механике. Момент

$$m = \frac{L_z}{\hbar}.$$

Представим, что  $\hat{L}_z$  — макроскопическая величина: пусть частица движется по кругу радиусом 1 см со скоростью 1 см/с. В этом случае

$$m = \frac{L_z}{\hbar} \approx \frac{1}{10^{-27}} = 10^{27},$$

то есть величина

$$(\sin \theta)^{|m|}$$

будет отлична от нуля только в том случае, когда

$$\sin \theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2},$$

что соответствует плоскому движению.

При переходе к корпускулам:

$$m \approx 10^{-27} \text{ гр.}, \quad r = 10^{-8} \text{ см}, \quad v = 10^8 \text{ см/с}.$$

Следовательно, показатель экспоненты пропорционален единице, то есть решение — не обязательно плоское. Собственные функции оператора  $\hat{L}^2$  и  $\hat{L}_z$  (сферические функции) имеют вид:

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = N P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

где  $N$  — нормировочный множитель, определяемый следующим соотношением:

$$N = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \cdot (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}.$$

Таким образом, если

$$\begin{aligned} m < 0 & \Rightarrow N > 0, \\ m > 0, m = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} & \Rightarrow N < 0 \end{aligned}$$

Сформулируем важное свойство сферических функций:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{l,m}^* Y_{l',m'} \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

Число сферических функций для каждого для каждого значения  $l$ :

$$N = 2l + 1.$$

Выпишем сферические функции для  $l = 0, 1, 2$ :

$$\begin{aligned} l = 0, m = 0 & \quad Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ l = 1, m = 1 & \quad Y_{1,1} = -\sin \theta e^{i\varphi} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \\ l = 1, m = 0 & \quad Y_{1,0} = \cos \theta \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \\ l = 1, m = -1 & \quad Y_{1,-1} = \sin \theta e^{-i\varphi} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \\ l = 2, m = 2 & \quad Y_{2,2} \sim \sin^2 \theta e^{2i\varphi} \\ l = 2, m = 1 & \quad Y_{2,1} \sim \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi} \\ l = 2, m = 0 & \quad Y_{2,0} \sim \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) \\ l = 2, m = -1 & \quad Y_{2,-1} \sim \sin \theta \cos \theta e^{-i\varphi} \\ l = 2, m = -2 & \quad Y_{2,-2} \sim \sin^2 \theta e^{-2i\varphi} \end{aligned}$$