

## ЛЕКЦИЯ 6

## Импульсное представление. Плотность потока вероятности. Общие свойства одномерного движения частицы

### 6.1. Импульсное представление

Рассмотрим импульсное представление вектора состояния частиц. Разберем сначала случай одномерного движения.

Вектор состояния частицы в конфигурационном представлении (в котором в качестве физических величин выбраны координаты) имеет вид:

$$|\Psi\rangle = \sum_{(x)} \psi(x)|x\rangle.$$

Поскольку величина  $x$  принимает непрерывные значения, эту сумму стоит понимать в смысле интеграла Лебега.

Если в качестве физической величины, определяющей вектор состояния, взять собственные состояния импульса частицы, тогда

$$|\Psi\rangle = \sum_{(p)} a(p)|p\rangle = \sum_{(x)} \psi(x)|x\rangle. \quad (6.1)$$

Зная вектор состояния в конфигурационном представлении, можно вычислить вектор состояния в импульсном представлении. Умножив уравнение (6.1) скалярно на  $\langle x|$ , получим:

$$\psi(x) = \sum_{(p)} a(p)\langle x|p\rangle. \quad (6.2)$$

Точно так же можно найти величину амплитуды состояния в разложении по импульсам. Умножив (6.2) слева на  $\langle p|$ , получим:

$$a(p) = \sum_{(x)} \psi(x)\langle p|x\rangle.$$

На самом деле, надо понимать, что под умножением, например выражения (6.2) на  $\langle x|$  подразумевается следующая операция:

$$\langle x|\Psi\rangle = \sum_{(x')} \psi(x')\langle x|x'\rangle \sum_{(x')} \psi(x')\delta_{xx'} = \psi(x).$$

В силу ортогональности собственных состояний, скалярное произведение

$$\langle p|x\rangle = \langle x|p\rangle^*. \quad (6.3)$$

Найдем собственный вектор импульса  $|p\rangle$  в конфигурационном представлении. Будем считать, что собственный вектор импульса, принадлежащий значению  $p'$  — собственный вектор оператора  $\hat{p}$ :

$$\hat{p}|p'\rangle = p'|p'\rangle. \quad (6.4)$$

## Лекция 6. Импульсное представление. Общие свойства одномерного движения

Представим вектор  $|p'\rangle$  в конфигурационном представлении

$$|p'\rangle = \sum_{(x')} \psi_{p'}(x')|x'\rangle. \quad (6.5)$$

Оператор  $\hat{p}$  известен в конфигурационном представлении (поскольку рассматривается случай одной переменной, запишем прямые производные вместо частных)

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}.$$

В этом случае уравнение (6.4) может быть записано следующим образом:

$$\hat{p} \sum_{(x')} \psi_{p'}(x')|x'\rangle = \sum_{(x')} -i\hbar \frac{d\psi_{p'}(x')}{dx'}|x'\rangle = p' \sum_{(x')} \psi_{p'}(x')|x'\rangle.$$

Сравнивая два полученных выражения, получим следующее уравнение (знак штрих теперь можно опустить):

$$-i\hbar \frac{d\psi_p}{dx} = p\psi_p.$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет следующий вид:

$$\psi_p(x) = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar}px},$$

где  $\psi_p(x)$  — амплитуда состояния, отвечающая вектору состояния с определенным импульсом в координатном представлении.

Спектр импульсов сплошной, поэтому нормировка волнового состояния осуществляется на  $\delta$ -функцию:

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p' - p).$$

В конфигурационном пространстве

$$\langle p|p'\rangle = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}px} e^{\frac{i}{\hbar}p'x} dx. \quad (6.6)$$

Известно следующее представление дельта-функции Дирака:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} d\xi = 2\pi\delta x.$$

Таким образом, выражение (6.6) принимает следующий вид:

$$\langle p|p'\rangle = |A|^2 2\pi\delta\left(\frac{p' - p}{\hbar}\right) = |A|^2 2\pi\hbar\delta(p' - p) \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}.$$

Следовательно, вектор состояния в импульсном пространстве (6.5) представляется следующей функцией:

$$\psi_p(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} e^{\frac{i}{\hbar}px}.$$

Функция  $\psi_p(x)$  — скалярное произведение вектора состояния  $|x\rangle$  и  $|p\rangle$

$$\psi_p(x) = \langle x|p\rangle.$$

Это позволяет перейти от конфигурационного представления к импульсному и наоборот. Следовательно, согласно (6.2)

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}px} a(p) dp. \quad (6.7)$$

Амплитуда  $a(p)$  выражается через  $\psi(x)$  аналогичной формулой. Учитывая (6.3), получим следующее выражение:

$$a(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}px} \psi(x) dx. \quad (6.8)$$

Формулы (6.7) и (6.8) определяют, соответственно, переход от импульсного представления к конфигурационному и от конфигурационного к импульсному.

С математической точки зрения эти значения есть амплитуды Фурье. Этот переход можно обобщить на трехмерный случай. В случае, когда вектор состояния для трехмерного движения записывается в виде

$$|\Psi\rangle = \sum_{(\vec{r})} \psi(\vec{r}) |\vec{r}\rangle = \sum_{(\vec{p})} a(\vec{p}) |\vec{p}\rangle,$$

где под вектором  $\vec{r}$  понимаются одновременно координаты  $x, y, z$ .

Формулы (6.7) и (6.8) примут в этом случае следующий вид:

$$\begin{cases} \psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \iiint e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{r}} a(\vec{p}) dp_x dp_y dp_z \\ a(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \iiint e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{r}} \psi(\vec{r}) dx dy dz \end{cases} \quad (6.9)$$

поскольку множитель по каждой из координат пропорционален  $(2\pi\hbar)^{-1/2}$ .

Формулы (6.9) позволяют решать некоторые практические задачи. Рассмотрим следующий пример.

**Пример 6.1.** Для того, чтобы убедиться в существовании антипротона в Дубне был построен ускоритель (см. рис. 6.1). Энергия, необходимая для реакции

$$p_1 + p_2 \rightarrow \bar{p} + 3p$$

вычисляется по следующей формуле (если считать, что второй протон изначально покоился):

$$S = (\underline{p}_1 + \underline{p}_2)^2 = m^2 + 2m\varepsilon_1 + m^2 > (4m)^2 \Rightarrow \varepsilon_1 > 7m.$$

Если ввести константу  $c$ :

$$\varepsilon_1 > 7mc^2 \simeq 7 \text{ ГэВ}.$$

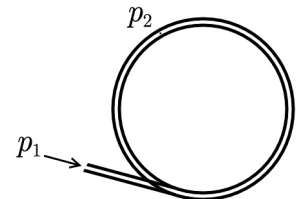


Рис. 6.1.

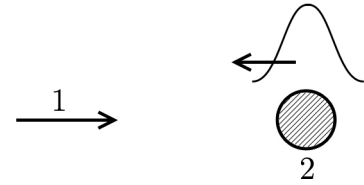
Ускоритель в Дубне был способен разогнать протоны до энергии порядка 10 ГэВ. В США в Беркли существовал ускоритель, энергия которого не достигала 7 ГэВ.

Если рассматривать рассеяние протона не на протоне, а на ядре, то покоящийся протон имеет некоторое импульсное распределение (см. рис. 6.2). Следовательно, существует случай, когда, казалось бы, покоящийся протон движется навстречу пучку (1).

В этом случае порог реакции будет ниже, поэтому Сегре и Чемберлен смогли в 1955 году на ускорителе в Беркли получить антипротон, а затем и антинейтрон.

Рассмотрим действие оператора координаты в импульсном представлении. Для одномерного случая:

$$|\Psi\rangle = \sum_{(x')} \psi(x')|x'\rangle = \sum_{(p')} a(p')|p'\rangle.$$



Подействуем оператором  $\hat{x}$  на вектор состояния:

$$\hat{x}|x'\rangle = x'|x'\rangle.$$

Рис. 6.2.

Следовательно, действие оператора  $\hat{x}$  в конфигурационном представлении сводится к умножению функции  $\psi(x')$  на  $x'$ . В импульсном представлении:

$$\hat{x}|\Psi\rangle_p = \sum_{(p')} a(p')\hat{x}|p'\rangle = \sum_{(p)} b(p)|p\rangle.$$

Умножив это выражение слева на вектор  $|p\rangle$ , получим амплитуду  $b(p)$ :

$$b(p) = \sum_{p'} \langle p|\hat{x}p'\rangle a(p'), \quad (6.10)$$

где  $\langle p|\hat{x}p'\rangle$  — матрица оператора  $\hat{x}$  в импульсном представлении. При умножении матрицы на вектор-столбец (в дискретном случае), результатом также является вектор-столбец.

Вычислять эту матрицу удобно в координатном представлении:

$$\langle p|\hat{x}p'\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}p'x} x e^{\frac{i}{\hbar}px} dx.$$

Этот интеграл расходится по абсолютному значению. Попробуем записать его в виде некоторой производной:

$$\langle p|\hat{x}p'\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{\hbar}{i} 2\pi \frac{d}{dp'} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)x} dx = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dp'} \delta(p' - p).$$

Соотношение (6.10) необходимо понимать как интеграл Лебега, поэтому

$$b(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{d}{dp'} \delta(p' - p) a(p') dp'. \quad (6.11)$$

Из курса математического анализа известно, что если

$$y(x) = \int y(x') \delta(x' - x) dx' \Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \int y(x') \frac{d}{dx'} \delta(x' - x) dx'.$$

Следовательно, выражение (6.11) принимает следующий вид:

$$b(p) = -\frac{\hbar}{i} \frac{da(p)}{dp} = i\hbar \frac{da(p)}{dp}.$$

Для наглядности рассмотрим следующую таблицу:

Физическая величина	Конфигурационное представление	Импульсное представление
$\vec{r}$	$\vec{r}$	$i\hbar \vec{\nabla}_p$
$\vec{p}$	$-i\hbar \vec{\nabla}_r$	$\vec{p}$

Физическим величинам должны отвечать эрмитовы операторы. Покажем, что оператор импульса в конфигурационном представлении эрмитов. Рассмотрим оператор:

$$\hat{L} = \lambda \frac{d}{dx}.$$

В этом случае эрмитово сопряженный оператор должен удовлетворять следующему соотношению:

$$\langle \Phi | \hat{L} | \Psi \rangle = \langle \hat{L}^\dagger \Phi | \Psi \rangle. \quad (6.12)$$



и пусть  $x$  меняется в некотором интервале  $(a, b)$  (см. рис. 6.3).

Рис. 6.3.

Будем считать, что на концах интервала

$$\Phi(a) = \Phi(b), \quad \Psi(a) = \Psi(b).$$

В общем случае можно устремить

$$a \rightarrow -\infty, \quad b \rightarrow +\infty,$$

а функции  $\Phi$  и  $\Psi$  на концах интервала считать равными нулю.

В этом случае выражение (6.12) примет следующий вид:

$$\int_a^b \Phi^* \lambda \frac{d\Psi}{dx} dx = \Phi^* \lambda \Psi \Big|_a^b - \lambda \int_a^b \frac{d\Phi^*}{dx} \Psi = - \int_a^b \left( \lambda^* \frac{d\Phi}{dx} \right)^* \Psi dx.$$

Следовательно, согласно (6.12), эрмитово сопряженный оператор:

$$\hat{L}^\dagger = -\lambda^* \frac{d}{dx}.$$

Чтобы оператор  $\hat{L}^\dagger$  был равен  $\hat{L}$  необходимо, чтобы

$$\lambda^* = -\lambda,$$

то есть величина  $\lambda$  должна быть чисто мнимой величиной.

Следовательно, оператор импульса в конфигурационном представлении и оператор координаты в импульсном представлении эрмитовы.

## 6.2. Плотность потока вероятности

Запишем уравнение Шредингера в конфигурационном представлении:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + (V_1 + iV_2)\Psi, \quad V_2 = 0, \quad (6.13)$$

хотя потенциал, очевидно, должен быть действительным, чтобы оператор Гамильтона был эрмитовым.

Комплексно сопряженное уравнению (6.13) уравнение Шредингера имеет вид:

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi^* + (V_1 - iV_2)\Psi^*. \quad (6.14)$$

Умножив уравнение (6.13) на  $\Psi^*$ , а уравнение (6.14) на  $\Psi$ , и вычтя из первого уравнения второе, получим:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\Psi^* \Psi) = -\frac{\hbar^2}{2m}(\Psi^* \Delta \Psi - \Psi \Delta \Psi^*) + 2iV_2 |\Psi|^2, \quad (6.15)$$

где

$$\Psi^* \Psi = |\Psi|^2.$$

Выражение в скобках в правой части выражения (6.15) легко преобразовать следующим образом:

$$\Psi^* \Delta \Psi - \Psi \Delta \Psi^* = \operatorname{div}(\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*),$$

поскольку:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\Psi^* \vec{\nabla} \Psi) = \Psi^* \Delta \Psi + \vec{\nabla} \Psi^* \vec{\nabla} \Psi; \\ \operatorname{div}(\Psi \vec{\nabla} \Psi^*) = \Psi \Delta \Psi^* + \vec{\nabla} \Psi \vec{\nabla} \Psi^*; \end{cases}$$

Умножив выражение (6.15) на  $i/\hbar$ , получим, что:

$$-\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \operatorname{div} \vec{j} - \frac{2}{\hbar} V_2 |\Psi|^2, \quad V_2 = 0. \quad (6.16)$$

Вектор  $\vec{j}$  в этом выражении имеет следующий вид:

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*). \quad (6.17)$$

Рассмотрим физический смысл этого выражения. Закон сохранения заряда в дифференциальной форме имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Эта формула выражает, что уменьшение заряда в некотором объеме равно потоку через поверхность, окружающую этот объем.

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = \oiint \vec{j} \vec{n} dS.$$

Выражение (6.17), по существу, выражает то же самое. Пусть в некотором объеме (см. рис. 6.4)

$$\iiint |\Psi|^2 dV$$

существует вероятность найти частицу в этом объеме.

Эта вероятность может измениться, поскольку частицы входят или выходят из этого объема, следовательно

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint |\Psi|^2 dV = \oiint \vec{j} \vec{n} dS.$$

Это выражение есть не что иное, как закон сохранения вероятности, в котором величина  $\vec{j}$ , задаваемая выражением (6.17), представляет собой **плотность потока вероятности**.

В случае заряда

$$\vec{j} = \rho \vec{v}.$$

В выражении (6.17)

$-i\hbar \vec{\nabla}$  — оператор импульса.

Поделив его на массу  $m$ , получим оператор скорости. Коэффициент  $1/2$  появляется, поскольку в скобке в выражении (6.17) два члена, причем второй член равен комплексно сопряженному первому. Таким образом, выражение в скобке — чисто мнимая величина, и, следовательно,  $\vec{j}$  — действительная величина.

Таким образом,  $\vec{j}$  — плотность потока вероятности. Пусть волновая функция имеет следующий вид:

$$\Psi = A(\vec{r}) e^{i\varphi(\vec{r})},$$

где  $A(\vec{r})$  — действительная функция.

Подставляя такую функцию  $\Psi$  в выражение (6.17) увидим, что производные по  $A(\vec{r})$  пропадут, поэтому:

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{m} |A|^2 \vec{\nabla} \varphi = \frac{\hbar}{m} |A|^2 \vec{\nabla} \varphi. \quad (6.18)$$

Таким образом, условие того, чтобы

$$\vec{j} \neq 0$$

заключается в том, что волновая функция (амплитуда состояния в конфигурационном пространстве) содержала зависящую от расстояния фазу.

В случае, когда

$$\varphi = \vec{k} \vec{r},$$

выражение (6.18) примет следующий вид:

$$\vec{j} = \frac{\hbar \vec{k}}{m} |A|^2 = \vec{v} \rho,$$

поскольку

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{\hbar \vec{k}}{m}.$$

В некоторых задачах частица исчезает или, наоборот, рождается. Например, при рассеянии нейтронов на ядре некоторые нейтроны рассеиваются (и это описывается уравнением Шредингера), а некоторые могут поглощаться.

В этом случае полная вероятность не сохраняется, поэтому даже если потока вероятности нет, то есть

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

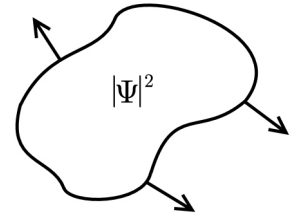


Рис. 6.4.

наличие члена, пропорционального  $V_2$ , причем

$$V_2 < 0$$

в уравнении (6.16) означает, что вероятность не сохраняется.

В этом случае вероятность будет падать. В нейтронной физике, при рассмотрении рассеяния на ядрах иногда пользуются комплексным потенциалом  $V_2$ , мнимая часть которого описывает исчезновение (рождение) частиц.

### 6.3. Общие свойства одномерного движения частицы

Рассмотрим простейший случай — одномерное движение частицы. Позднее будет получено, что движение в сферическом поле можно свести к одномерному движению по радиусу.

Стационарное уравнение Шредингера имеет следующий вид:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi,$$

следовательно

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi = E\Psi.$$

Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + k^2(x)\Psi = 0, \quad k^2(x) = \frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2}. \quad (6.19)$$

Это уравнение — линейное дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее два линейно независимых решения. Общее решение определяется как суперпозиция двух решений с двумя независимыми константами.

Если существуют два независимых решения, то детерминант

$$\begin{bmatrix} \Psi'_1 & \Psi'_2 \\ \Psi_1 & \Psi_2 \end{bmatrix} = W,$$

который называется детерминантом Вронского, постоянный.

Получить теорему о сохранении детерминанта Вронского можно тем же способом, как ранее было получено выражение для плотности потока вероятности. Необходимо уравнение (6.13) умножить на  $\Psi_2$ , а уравнение (6.14) на  $\Psi_1$  и вычесть из одного уравнения другое.

В классической механике величина

$$2m(E - V(x))$$

была бы равна квадрату импульса, поскольку

$$E = \frac{mv^2}{2} + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \Rightarrow (E - V(x)) \cdot 2m = \frac{p^2(x)}{2m} \cdot 2m = p^2(x).$$

Следовательно,

$$k^2(x) = \frac{p^2(x)}{\hbar^2},$$

где  $k^2(x)$  — квадрат переменного волнового вектора.

В классической механике величина

$$E - V(x) = \frac{p^2(x)}{2m} \geq 0,$$

то есть мнимый импульс в классической механике недопустим.



Решая уравнение Шредингера для некоторого сложного потенциала (см. рис. 6.5) на всем интервале

$$x \in (-\infty, +\infty),$$

в зависимости от энергии можно попасть как в области, где

$$k^2(x) > 0,$$

так и в те, где

$$k^2(x) < 0.$$

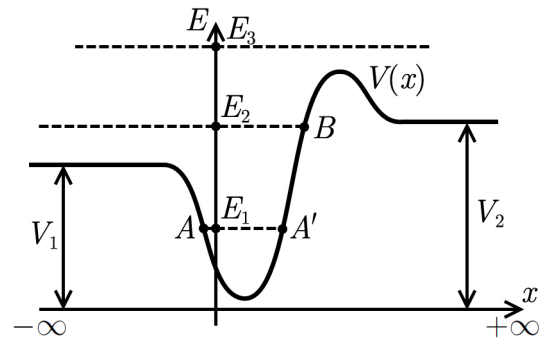


Рис. 6.5.

При энергии  $E_1$  классическая частица может двигаться только внутри «ямы», а точки  $A$  и  $A'$ , где энергия частицы совпадает с потенциалом — точки остановки для классической частицы. Если же энергия равна  $E_2$ , то перемещение частицы ограничено точкой  $B$ .

Если же энергия

$$E \geq E_3,$$

то классическая частица может оказаться в любой точке прямой.

Рассмотрим вначале следующий случай. Пусть потенциал  $V$  постоянный и

$$E - V > 0 \Rightarrow E > V, \quad k^2 > 0.$$

Следовательно, уравнение Шредингера (6.19) примет следующий вид:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + k^2\Psi = 0 \Rightarrow \Psi = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx}.$$

Таким образом, в классической области существуют два осциллирующих решения. В неклассической области

$$E - V < 0 \Rightarrow E < V \Rightarrow k^2 = -\kappa^2, \quad \kappa^2 > 0.$$

В этом случае решение уравнения Шредингера (6.19) примет следующий вид:

$$\Psi = c_1 e^{\kappa x} + c_2 e^{-\kappa x},$$

то есть в неклассической области решение будет либо экспоненциально растущее, либо экспоненциально падающее.

Рассмотрев сложный потенциал  $V(x)$  (см. рис. 6.5), сможем определить, что существуют три области (в зависимости от энергии), которые соответствуют трем физически различным областям движения.

Пусть для определенности

$$V_2 > V_1.$$

Определим эти области следующим образом:

- (I) :  $E > V_2 \geq V_1$
- (II) :  $V_2 > E > V_1$
- (III) :  $E < V_1 \leq V_2$

Качественный характер движения не зависит от формы потенциала, а зависит лишь от энергии по отношению к асимптотическим значениям потенциала на бесконечности.

Рассмотрим вначале первую область. При

$$x \rightarrow +\infty, \quad V \rightarrow V_2,$$

и решение будет иметь вид:

$$\Psi = c_1 e^{ik_2 x} + c_2 e^{-ik_2 x}.$$

Выберем решение такое, что

$$\Psi_1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{ik_2 x}.$$

Решение  $\Psi_1$  представляет собой поток плотности вероятности (поток частицы), идущей слева направо. На левом конце оси  $x$  может существовать не только набегающая, но и отраженная волна:

$$\Psi_1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \alpha_{11} e^{ik_1 x} + \alpha_{12} e^{-ik_1 x}, \quad (6.20)$$

причем величины  $\alpha_{ik}$  зависят от энергии и являются функциями потенциала

$$\alpha = \alpha_{ik}(E, \Phi(V)).$$

Второе решение возьмем равным комплексно-сопряженному. Это удобно сделать, поскольку  $\Psi_1$  и  $\Psi_1^*$  — линейно независимые решения. Тогда

$$\alpha_{12}^* e^{ik_1 x} + \alpha_{11}^* e^{-ik_1 x} \xleftarrow{x \rightarrow -\infty} \Psi_2 = \Psi_1^* \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-ik_2 x}. \quad (6.21)$$

При стационарной задаче производная по времени равна нулю, поэтому должен сохраняться поток вероятности  $j_x$ :

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad j_x = \text{const.}$$

В первом случае поток вероятности при  $x \rightarrow +\infty$  равен:

$$j_{+\infty} = \frac{\hbar k_2}{m} = j_{\text{прош.}},$$

а при  $x \rightarrow -\infty$  из равенства потоков следует, что

$$j_{-\infty} = \frac{\hbar k_1}{m} (|\alpha_{11}|^2 - |\alpha_{12}|^2) = j_{+\infty} = \frac{\hbar k_2}{m}. \quad (6.22)$$

В выражении (6.20) первое слагаемое отвечает падающей волне, а второе — отраженной, поэтому можно ввести следующие определения:

**Определение 6.1. Коэффициент прохождения** слева направо

$$D = \frac{j_{\text{прош.}}}{j_{\text{пад.}}} = \frac{1}{|\alpha_{11}|^2} \frac{k_2}{k_1}.$$

**Определение 6.2. Коэффициент отражения**

$$R = \frac{j_{\text{отр.}}}{j_{\text{пад.}}} = \frac{|\alpha_{12}|^2}{|\alpha_{11}|^2}.$$

Поделив соотношение (6.22) на  $k_1$ , получим, что

$$|\alpha_{11}|^2 - |\alpha_{12}|^2 = \frac{k_2}{k_1}.$$

Поделив, в свою очередь, это состояние на  $|\alpha_{11}|^2$ , получим:

$$1 - \frac{|\alpha_{12}|^2}{|\alpha_{11}|^2} = \frac{k_2}{k_1 |\alpha_{11}|^2} \Leftrightarrow 1 - R = D \Rightarrow R + D = 1.$$

Это естественный результат, поскольку потерей вероятности нет, поэтому часть падающей волны проходит сквозь барьер, а часть этой волны отражается.

Возможно, что энергия

$$E = E_3.$$

В классической механике частица с такой энергией, дойдя до точки  $A$ , отразится от барьера и начнет движение в обратном направлении (см. рис. 6.6). В квантовой механике, согласно полученным результатам, возможно **подбарьерное (туннельное) прохождение частицы**.

Второй неклассический эффект заключается в том, что при энергии

$$E = E_4 > V, \quad \forall x$$

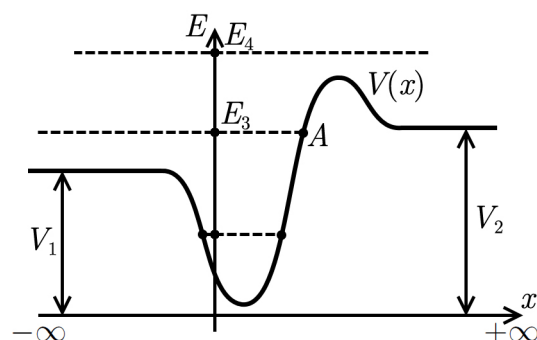


Рис. 6.6.

в классической механике частица не отразилась бы от барьера, а в квантовой механике возможно **надбарьерное отражение**.

Коэффициент прохождения справа налево и слева направо одинаков для любого потенциала. Пусть, например, потенциал  $V(x)$  имеет следующий вид (см. рис. 6.7).

Для того, чтобы описать движение справа налево нужно, чтобы при

$$x \rightarrow -\infty \quad \Psi_1 = e^{-ik_1 x},$$

то есть существовала только волна, распространяющаяся налево.

В случае I двукратное вырождение энергии отвечает, с физической точки зрения, тому, что возможно движение слева направо и справа налево. Умножив левую и правую часть выражения (6.20) на  $\alpha_{12}^*$ , а левую и правую часть выражения (6.21) на  $\alpha_{11}$ , и вычтя из первого выражения второе, получим в левой части только волну, пропорциональную

$$e^{-ik_1 x}.$$

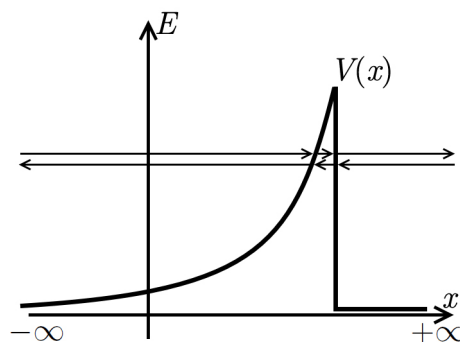


Рис. 6.7.

Таким образом, волновая функция, отвечающая движению справа налево будет иметь следующий вид:

$$\Psi = \alpha_{12}^* \Psi_1 + \alpha_{11} \Psi_2.$$

На правом конце в этом случае

$$\Psi = \alpha_{12}^* e^{ik_2 x} + \alpha_{11} e^{-ik_2 x},$$

причем первое слагаемое в этом выражении отвечает отраженной волне, а второе — падающей.

Следовательно, коэффициент отражения принимает следующий вид:

$$R' = \frac{|\alpha_{12}^*|^2}{|\alpha_{11}|^2} = R.$$

Следовательно, коэффициент прохождения справа налево и слева направо действительно одинаков и не зависит от формы потенциального барьера  $V(x)$ . Ранее было доказано, что  $\Psi$  и  $\Psi^*$  обратимы по времени. Соответственно этому, движение в прямом и обратном направлении повторяет друг друга, то есть коэффициент прохождения барьера одинаков с обеих сторон.