ЛЕКЦИЯ 11

Законы сохранения в квантовой механике. Момент импульса

11.1. Симметрия гамильтониана и законы сохранения

Гамильтониан системы определяет ее поведение и свойства и может зависеть от ряда параметров. Если эти параметры подвергаются некоторому преобразованию: таком, при котором гамильтониан сохраняет свой вид, то говорят, что гамильтониан **симметричен** относительно этого преобразования (или просто говорят, что существует симметрия системы).

Преобразования гамильтониана делятся на два типа:

– **Активные преобразования**, например — сдвиг системы частиц в пространстве;

– **Пассивные преобразования**, результат этого преобразования может быть тот же самый, однако сдвинуть можно не систему в пространстве, а систему координат (при изменении системы координат сама система частиц, очевидно, остается неизменной);

В нашем курсе удобнее пользоваться пассивными преобразованиями. Пусть $\hat{O}$ — некоторый оператор преобразования. Подействовав этим оператором на вектор состояния, являющийся результатом действия оператора Гамильтона на волновую функцию:

$$\hat{O}\hat{H}\Psi.$$

Если оператор Гамильтона симметричен относительно этого преобразования, то он не меняется, поэтому действие оператора преобразования сведется к действию только на волновую функцию:

$$\hat{O}\hat{H}\Psi = \hat{H}\hat{O}\Psi.$$

В силу произвольности волновой функции получается, что

$$\hat{O}\hat{H} = \hat{H}\hat{O} \quad \Rightarrow \quad [\hat{H}, \hat{O}] = 0. \tag{11.1}$$

Оператор производной физической величины $\hat{f}$, не зависящий явно от времени, имеет следующий вид:

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{f}].$$

Следовательно, если выполняется соотношение (11.1) и в операторе $\hat{O}$ можно выделить некоторую физическую величину, то эта физическая величина будет сохраняться:

$$\overline{\frac{d\hat{O}}{dt}} = \frac{\overline{dO}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\overline{[\hat{H}, \hat{O}]} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{O} = \text{const}.$$

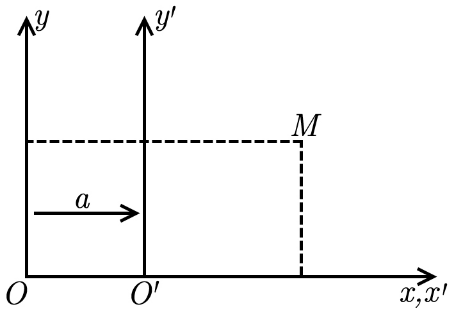

Рис. 11.1.

Таким образом, если существует симметричный гамильтониан, и в этой симметрии можно выделить некоторую физическую величину, то эта величина будет сохраняться и, следовательно, будет являться интегралом движения.

Рассмотрим несколько законов сохранения, получающихся из симметрии гамильтониана. Пусть гамильтониан замкнутой системы частиц имеет вид:

$$\hat{H} = \sum_n \frac{\hat{\vec{p}}_n^2}{2m_n} + \sum_{n \neq m} V_{nm}(|\vec{r}_n - \vec{r}_m|). \tag{11.2}$$

Такой гамильтониан симметричен относительно сдвига всей системы на определенное расстояние или сдвига системы координат, поскольку при этом ни расстояние между частицами, ни импульсы частиц не меняются.

Рассмотрим это преобразование на примере одной частицы. Пусть есть некоторая система координат, которая сдвигается на величину a (см. рис. 11.1).

Пусть некоторая точка M имеет координату (x_0, y_0) в старой системе координат. В новой системе координат координаты точки M окажутся равными:

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y \end{cases}$$

Вид волновой функции в точке x' может отличаться от вида ее же в первоначальной системе O. Однако, поскольку с физической точки зрения ничего не изменилось, то

$$\Psi'(x') = \Psi(x) = \Psi(x' + a). \tag{11.3}$$

Следовательно, при сдвиге системы координат волновая функция меняется и ее значение в точке с координатой x' равно значению изначальной функции Ψ в точке с координатой $x + a$.

Опустив индекс штрих в (11.3) в аргументе функций Ψ' и Ψ, получим:

$$\Psi'(x) = \Psi(x + a) = \hat{T}_a \Psi(x), \tag{11.4}$$

где $\hat{T}_a$ — некоторый **оператор трансляции (сдвига)**.

Пусть a — бесконечно малая величина

$$a \to \delta a.$$

Тогда $\Psi'(x)$ можно разложить по малому параметру a, с точностью до второго порядка малости:

$$\Psi'(x) = \Psi(x) + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \delta a + O(\delta a^2) = \left(1 + \delta a \frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi(x). \tag{11.5}$$

Сравнивая выражения (11.4) и (11.5), можно сказать, что оператор сдвига имеет вид:

$$\hat{T}_{\delta a} = 1 + \delta a \frac{\partial}{\partial x}.$$

Это выражение можно было бы записать по-другому:

$$\hat{T}_{\delta a} = 1 + \delta a \cdot \frac{i}{\hbar} \cdot \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) = 1 + \delta a \cdot \frac{i}{\hbar} \cdot \hat{p}_x, \tag{11.6}$$

где $\hat{p}_x$ — оператор импульса в направлении оси x.

Гамильтониан (11.2) описывается волновой функцией n частиц:

$$\Psi(\dots\vec{r}_n\dots).$$

Записав аналогично (11.6) оператор сдвига вдоль осей y и z, получим, что если сдвиг системы происходит на некоторый вектор

$$\delta\vec{a} = (\delta a_x, \delta a_y, \delta a_z)$$

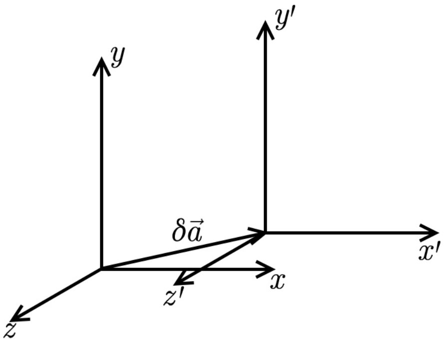

Рис. 11.2.

(см. рис. 11.2), то волновую функцию Ψ в этом случае нужно раскладывать по x, y и z независимо.

В результате, оператор свдига для одной частицы окажется равным:

$$\hat{\vec{T}}_{\delta a} = 1 + \frac{i}{\hbar}\delta\vec{a}\,\hat{\vec{p}} = 1 + \frac{i}{\hbar}(\delta a_x\hat{p}_x + \delta a_y\hat{p}_y + \delta a_z\hat{p}_z),$$

а для системы, состоящей из n частиц, оператор сдвига примет вид:

$$\hat{T}_{\delta a} = 1 + \frac{i}{\hbar}\sum_n \hat{\vec{p}}_n.$$

Поскольку при сдвиге гамильтониан не меняется, то, согласно (11.1), он будет коммутировать с оператором $\hat{T}_{\delta a}$:

$$[\hat{H}, \hat{T}_{\delta a}] = 0,$$

то есть поскольку оператор всегда коммутирует с числом, гамильтониан будет коммутировать с суммой операторов импульса по всем частицам, то есть с оператором суммарного импульса $\hat{\vec{P}}$:

$$\sum_n \hat{\vec{p}}_n = \hat{\vec{P}} \quad \Rightarrow \quad [\hat{H}, \hat{\vec{P}}] = 0. \qquad (11.7)$$

Если бы смещение $\delta\vec{a}$ было таково, что:

$$\delta\vec{a} = (\delta a_x, 0, 0),$$

то гамильтониан в (11.7) коммутировал бы только с x-компонентой суммарного импульса:

$$[\hat{H}, \hat{\vec{P}}_x] = 0.$$

Аналогичное утверждение можно было бы доказать в случае, когда смещение представлено только y или z-компонентой. Таким образом, для замкнутой системы:

$$\overline{\vec{P}} = \text{const}.$$

Стало быть, из симметрии относительно сдвигов следует закон сохранения импульса в квантовой механике аналогично тому, как он получается из этой симметрии в классической механике. Существует общая теорема Эми Нетер, которая утверждает, что всякому закону симметрии отвечает некоторый закон сохранения, и наоборот — всякому закону сохранения отвечает определенная симметрия.

Например, закону сохранения электрического заряда отвечает определенная симметрия (калибровочная симметрия), используя которую можно теоретически построить классическую электродинамику.

Аналогичным образом можно получить законы сохранения, вытекающие из симметрии гамильтониана относительно поворота всей системы. Пусть есть некоторая физическая система и некоторая начальная система координат K (см. рис. 11.3).

Выберем некоторый единичный вектор $\vec{n}$, и повернем вокруг него систему координат на угол $\delta\varphi$:

$$\delta\vec{\varphi} = \vec{n}\cdot\delta\varphi.$$

Из курса теоретической механики известно, что

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - [\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}].$$

В дальнейшем векторное произведение двух векторов будем записывать, используя знак наклонного креста $\times$, чтобы избежать путаницы между векторным произведением и коммутаторами.

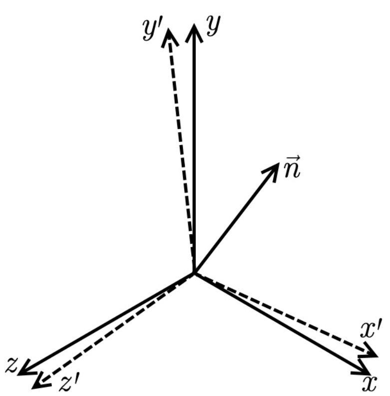

Рис. 11.3.

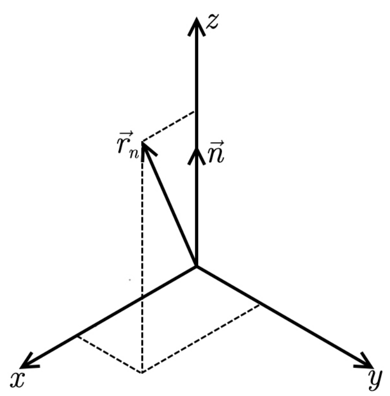

Рис. 11.4.

Пусть поворот происходит только вокруг оси z (см. рис. 11.4). Тогда, поскольку система не меняется:

$$\Psi'(\ldots\vec{r}_n\,'\ldots) = \Psi(\ldots\vec{r}_n\ldots) = \Psi(\ldots\vec{r}_n\,' + [\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_n\,']\ldots),$$

Снова опустив штрих при аргументах волновой функции Ψ и Ψ', получим:

$$\Psi'(\ldots\vec{r}_n\ldots) = \Psi(\ldots\vec{r}_n + [\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_n]\ldots), \tag{11.8}$$

учитывая, что для случая n частиц $\vec{r}_n$ — радиус-вектор одной из частиц.

Если попробовать разложить выражение (11.8) по малому параметру $\delta\vec{\varphi}$, то получим следующее:

$$\Psi'(\ldots\vec{r}_n\ldots) = \Psi(\ldots\vec{r}_n\ldots) + \sum_n[\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_n]\vec{\nabla}_{r_n}\cdot\Psi = \Big\{1 + \sum_n[\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_n]\vec{\nabla}_{r_n}\Big\}\Psi.$$

В этом выражении умножение векторного произведения скалярно на градиент — смешанное произведение, которое может быть записано в следующем виде:

$$[\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_n]\vec{\nabla}_{r_n} = [\vec{r}_n\times\vec{\nabla}]\delta\vec{\varphi}.$$

Это удобно сделать, поскольку в этом случае $\delta\vec{\varphi}$ можно вынести за знак суммы. **Оператор поворота** $\hat{R}_{\delta\varphi}$ в этом случае можно записать так:

$$\hat{R}_{\delta\varphi} = 1 + \delta\vec{\varphi}\sum_n [\vec{r}_n \times \vec{\nabla}_{r_n}]. \tag{11.9}$$

Поскольку

$$1 = \frac{i}{\hbar}(-i\hbar),$$

то, умножив второе слагаемое в (11.9) на это выражение, причем приписав $(-i\hbar)$ рядом с градиентом, а $i/\hbar$ вынеся за скобку, то оператор поворота (11.9) на бесконечно малый угол в этом случае примет вид:

$$\hat{R}_{\delta\varphi} = 1 + \frac{i}{\hbar}\,\delta\vec{\varphi}\sum_n [\vec{r}_n \times \hat{\vec{p}}_n].$$

В классической механике

$$\vec{L} = [\vec{r}_n, \vec{p}_n]$$

есть момент импульса n-ой частицы.

Следовательно,

$$\sum_n [\vec{r}_n \times \vec{p}_n] = \vec{L}$$

есть сумма моментов импульса всех частиц, то есть суммарный момент импульса частицы.

Следовательно, оператор поворота системы можно записать так:

$$\hat{R}_{\delta\varphi} = 1 + \frac{i}{\hbar}\delta\vec{\varphi}\hat{\vec{L}}, \tag{11.10}$$

где оператор $\hat{\vec{L}}$ соответствует классическому моменту количества движения всей системы:

$$\hat{\vec{L}} = \sum_n [\vec{r}_n \times \hat{\vec{p}}_n].$$

Поскольку гамильтониан замкнутой системы не меняется при повороте, коммутатор

$$[\hat{H}, \hat{R}_{\delta\varphi}],$$

как и в предыдущий раз, сводится к коммутатору гамильтониана с оператором полного момента количества движения.

Следовательно, все компоненты момента количества движения должны сохраняться:

$$[\hat{H}, \hat{\vec{L}}] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\hat{H}, \hat{L}_x] = [\hat{H}, \hat{L}_y] = [\hat{H}, \hat{L}_z] = 0.$$

Рассмотрим, почему компоненты должны сохраняться по отдельности. Пусть, например, $\delta\vec{\varphi}$ представлено следующим образом:

$$\delta\vec{\varphi} = (\delta\varphi_x, 0, 0)$$

В этом случае, очевидно,

$$[\hat{H}, \hat{L}_x] = 0.$$

Взяв теперь величину $\delta\vec{\varphi}$ такую, что в ней содержатся только y или z-компоненты, получим соответствующее выражение для $\hat{L}_y$ и $\hat{L}_z$.

Таким образом, операторы $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ по отдельности коммутируют с гамильтонианом. Из инвариантности гамильтониана замкнутой системы относительно поворотов следует сохранение величин, отвечающих моменту количества движения.

Эти законы сохранения в квантовой механике были получены таким же способом, каким они были получены в классической механике при непрерывных бесконечно малых преобразованиях сдвига или поворотах системы.

В квантовой механике возникают также законы сохранения, аналогов которым в классической механике не существует. Они возникают при так называемых **дискретных преобразованиях**.

Одна из таких симметрий (и соответствующий ей закон сохранения) уже встречались в нашем курсе. При рассмотрении движения частицы в периодическом поле было выяснено, что существует теорема Блоха, то есть возникает квазиимпульс: волновые функции имеют блоховский вид:

$$\Psi = e^{iqx}U_{nq}(x), \tag{11.11}$$

где $U_{nq}(x)$ — периодическая функция, причем

$$-\frac{pi}{a} < q < \frac{\pi}{a}.$$

Величину q можно представить в виде

$$q = \frac{p}{\hbar}.$$

Тогда, при подстановке этого значения в (11.11), получается, что в периодическом поле возникает квазиимпульс, причем этот квазиимпульс может существовать в ограниченных пределах.

Это есть следствие дискретной симметрии: в периодическом поле систему координат можно смещать на дискретное расстояние, кратное периоду решетки.

Введем понятие **четности**. Гамильтониан (11.2) инвариантен относительно инверсии всех осей, то есть замены всех осей на противоположные по направлению. При этом изменение координат частицы записывается следующим образом:

$$\vec{r} \to \vec{r}' = -\vec{r}.$$

Волновая функция $\Psi'(\vec{r}')$ должна равняться значению волновой функции Ψ в точке с радиус-вектором $\vec{r}$:

$$\Psi'(\vec{r}') = \Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r}').$$

Снова опуская штрихованный индекс в аргументах волновых функций, получим:

$$\Psi'(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r}) = \hat{I}\Psi(\vec{r}),$$

где $\hat{I}$ — **оператор инверсии**, который, действуя на волновую функцию $\Psi(\vec{r})$, превращает ее в функцию $\Psi(-\vec{r})$.

Оператор инверсии коммутирует с гамильтонианом:

$$[\hat{H}, \hat{I}] = 0, \tag{11.12}$$

поскольку при изменении всех координат на противоположные гамильтониан не меняется. Из этого факта напрямую следует коммутационное соотношение (11.12).

Если операторы двух величин коммутируют, то эти величины одновременно измеримы, то есть существует система уравнений:

$$\begin{cases} \hat{H}\Psi = E\Psi \\ \hat{I}\Psi = \lambda\Psi. \end{cases} \tag{11.13}$$

Следовательно, если имеется определенный невырожденный уровень энергии, то ему соответствует определенное собственное значение оператора инверсии $\hat{I}$.

Найдем собственное значение оператора инверсии. Подействуем оператором инверсии $\hat{I}$ на второе уравнение системы (11.13):

$$\hat{I}\hat{I}\Psi = \lambda\hat{I}\Psi.$$

Поскольку оператор

$$\hat{I}\hat{I} = \hat{I}^2$$

соответствует двойному отражению (то есть отсутствию каких-либо изменений), то

$$\hat{I}\hat{I} = \hat{I}^2 = 1.$$

Следовательно, согласно второму уравнению в (11.13)

$$\Psi = \lambda\hat{I}\Psi = \lambda\lambda\Psi = \lambda^2\Psi.$$

Следовательно, в силу произвольности волновой функции Ψ, возможные значения λ оказываются равными:

$$\lambda^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1, \qquad \lambda = -1,$$

причем величине $\lambda = 1$ соответствует, очевидно, четная волновая функция, а величине $\lambda = -1$ — нечетная.

Существование величины λ (четности) определяет важные понятия в квантовой механике. Если в первом уравнении системы (11.13) величина E невырожденная (то есть волновая функция, соответствующая этой энергии, единственная), то четность состояния также будет определена.

Пример 11.1. Покажем, что из сохранения четности следует, например, отсутствие дипольного момента у атомов, находящихся в невырожденных состояниях.

По определению, x-составляющая дипольного момента равна:

$$d_x = \sum_i ex_i, \tag{11.14}$$

где суммирование ведется по всем частицам.

Для нахождения среднего значения дипольного момента системы возьмем интеграл по всем частицам:

$$\overline{d}_x = \iiint \ldots \Psi_n^*(\ldots x_i \ldots) \sum_i ex_i \, \Psi_n(\ldots x_i \ldots) \prod d^3x_i. \tag{11.15}$$

Заменим
$$x_i \to -x_i$$
для каждой частицы.

В этом случае, согласно определению оператора инверсии:
$$\Psi_n^*(\dots x_i \dots) = \lambda \Psi_n^*(\dots x_i \dots)$$
$$\Psi_n(\dots x_i \dots) = \lambda \Psi_n(\dots x_i \dots),$$
причем величина (11.14) меняет знак на противоположный при таком преобразовании (осуществить такое преобразование всегда возможно, поскольку это преобразование координат, по которым происходит интегрирование).

Следовательно, интеграл в (11.15) изменит знак на противоположный, то еть
$$\overline{d}_x = -\overline{d}_x, \qquad \lambda^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \overline{d}_x = 0.$$

Если же существует вырождение, то такое требование может не выполняться. Матричный элемент дипольного момента для различных волновых функций (с индексами m и n) будет отличен от нуля только в случае, когда четности одной и другой волновых функций будут противоположны.

Этот факт определяет законы электромагнитного излучения: при рассмотрении переходов в атоме с испусканием фотона, дипольный переход может осуществляться только между состояниями с противоположной четностью.

Таким образом, четность может разрешать и запрещать определенные переходы для дипольного приближения. Квадрупольное и магнитное излучение, в свою очередь, должно происходить без изменения четности.

Аналогии физической величины четность в классической механике нет и не может быть. Для волн в волноводах такое понятие можно ввести.

Четность не коммутирует с импульсом. Подействовав оператором инверсии на некоторую компоненту импульса, действующую, в свою очередь, на волновую функцию:
$$\hat{I}\hat{p}_x\Psi = -\hat{p}_x\hat{I}\Psi \quad \Rightarrow \quad \hat{I}\hat{p}_x = -\hat{p}_x\hat{I},$$
то есть четность антикоммутирует с оператором импульса.

Следовательно, состояние с определенным импульсом не имеет определенной четности. В этом легко убедиться. Возьмем состояние с определенным импульсом:
$$e^{\frac{i\vec{p}\vec{r}}{\hbar}} = \cos\frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar} + i\sin\frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar},$$
причем первое слагаемое в этом равенстве соответствует состоянию с $\lambda = 1$,а второе — состоянию с $\lambda = -1$.

Таким образом, состояние с определенным импульсом содержит в себе состояние и с положительной, и с отрицательной четностью.

Состояние
$$e^{\frac{i\vec{p}\vec{r}}{\hbar}}$$
отвечает энергии
$$E = \frac{p^2}{2m}. \tag{11.16}$$

Это состояние вырожденное, поскольку существует также состояние

$$e^{-\frac{i\vec{p}\vec{r}}{\hbar}},$$

имеющее ту же энергию.

Таким образом, требование системы (11.13) выполняется: состояния с определенным импульсом имеют вырожденную энергию и, следовательно, не имеют определенной четности.

Четность коммутирует с оператором момента импульса. При применении оператора инверсии $\hat{I}$ к оператору момента импульса $\hat{\vec{L}}$:

$$\hat{\vec{L}} = [\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}]$$

меняется на противоположное и значение величины $\vec{r}$, и значение величины $\vec{p}$, то есть

$$\hat{I}[\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}]\Psi = [\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}]\hat{I}\Psi.$$

Следовательно, состояние с определенным моментом импульса имеет определенную четность. Наряду с пространственной четностью существуют другие виды четности.

Для сильных ядерных взаимодействий и для электромагнитных взаимодействий характерно сохранение следующей симметрии: пусть есть система, в которой число частиц и античастиц одинаково.

Заменим все частицы на античастицы, и наоборот. В этом случае, фактически, система не изменилась. Это действие аналогично применению оператора инверсии. Следовательно, относительно такой замены может существовать четный и нечетный множитель волновой функции.

Это явление представляет собой **зарядовую четность** системы. Наряду с пространственной четностью, зарядовая четность важна: она определяет правило различных переходов и запрещает некоторые переходы.

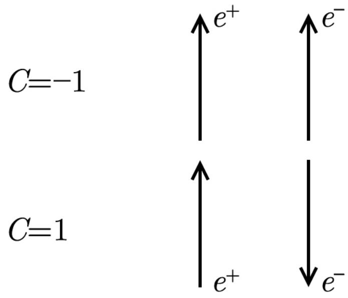

Рис. 11.5.

Пусть система состоит из электрона и позитрона (модель атома). Существует **ортопозитроний** (когда спины электрона и позитрона направлены в одну сторону) и **парапозитроний**, когда спины направлены в разные стороны (см. рис. 11.5).

Первое состояние имеет четность

$$C = -1,$$

а второе четность

$$C = 1.$$

Зарядовая четность фотона отрицательна, поскольку при замене всех частиц на античастицы в системе знак поля изменится на противоположный. Соответственно этому, парапозитроний может распадаться на два фотона (см. рис. 11.6). Зарядовая четность при этом сохраняется, так как:

$$C_\gamma \cdot C_\gamma = (-1) \cdot (-1) = 1.$$

Ортопозитроний, в свою очередь, распадается на три фотона (см. рис. 11.6), так как:

$$(C_\gamma)^3 = (-1)^3 = -1,$$

причем время жизни τ парапозитрония составляет 10^{-10} секунды, а время жизни парапозитрония — 10^{-7} секунды.

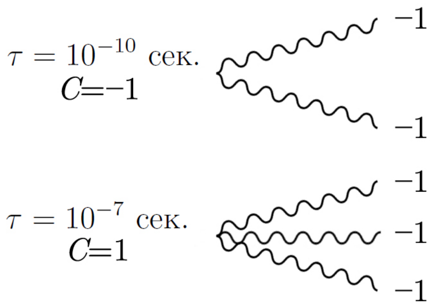

Рис. 11.6.

Существует масса примеров из физики элементарных частиц, в которых зарядовая четность определяет возможность распадов и переходов.

В слабых взаимодействиях не сохраняется ни пространственная, ни зарядовая четность. В слабых взаимодействиях (в релятивистском случае) гамильтониан имеет более сложный вид, чем выражение (11.2): он зависит, например, от спинов частиц.

В слабых взаимодействиях сохраняется C_p-четность (комбинационная четность). Если одновременно произвести зарядовое сопряжение системы (замену всех частиц на античастицы) и пространственное отражение, то относительно такого преобразования четность сохраняется.

μ^--мезон распадается на электрон e^-, антинейтрино $\tilde{\nu}_e$ и мюонное нейтрино ν_μ:

$$\mu^- \to e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu,$$

а μ^+-мезон распадается на позитрон e^+, электронное нейтрино ν_e и антимюонное нейтрино $\tilde{\nu}_\mu$:

$$\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \tilde{\nu}_\mu.$$

Если спин μ^- мезона направлен как на рисунке 11.7, то электроны под углом θ и $\pi - \theta$ распространяются с равной вероятностью (большей в направлении θ). Следовательно, очевидно, четность в плоскости α, перпендикулярной спину, явно не сохраняется.

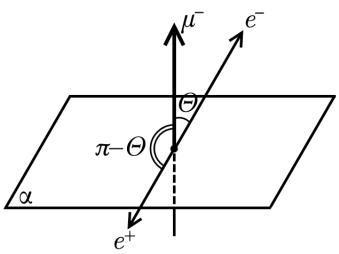

Рис. 11.7.

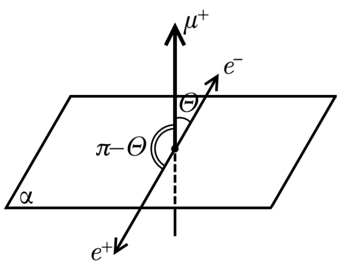

Рис. 11.8.

Однако, если сравнить этот распад с распадом μ^+-мезона, окажется, что распад этого мезона будет более интенсивен в направлении $\pi - \theta$, чем в θ (см. рис. 11.8).

То есть, при переходе от частиц к античастицам и осуществлению отражения в плоскости, перпендикулярной спину, то возникает симметрия.

В конце XX века были обнаружены явления, в которых наблюдается нарушение C_p-четности. Эти явления, возможно, могут объяснить барионную симметрию Вселенной. Отсутствие антибарионов во Вселенной (кроме случая их рождения в космических лучах и на ускорителях), возможно, связано с нарушением C_p-четности.

Существуют другие типы симметрии гамильтониана, приводящие к определенным законам сохранения. Например, в системе одинаковых частиц перестановка таких частиц, казалось бы, не меняет гамильтониана. Из этих правил перестановок могут быть получены некоторые законы сохранения.

11.2. Момент импульса. Коммутация момента с векторными величинами

В классической механике вектором называется величина, преобразующаяся так же, как векторы системы координат. Например, при повороте системы координат:

$$\vec{A} = \vec{A}' + [\delta\vec{\varphi} \times \vec{A}].$$

Если величине $\vec{A}$ отвечает оператор $\hat{\vec{A}}$, то такое же соотношение должно выполняться для операторов:

$$\hat{\vec{A}} = \hat{\vec{A}}' + [\delta\vec{\varphi} \times \hat{\vec{A}}]. \tag{11.17}$$

Рассмотрим связь между преобразованиями системы координат для векторных величин в разных системах отсчета. При повороте некоторой системы координат K (см. рис. 11.9) на угол

$$\delta\vec{\varphi} = \vec{n}\,\delta\varphi,$$

возникает система координат K', обозначенная штрихованными линиями на рисунке 11.9.

При этом волновые функции преобразуются следующим образом:

$$|\Psi'\rangle = \hat{R}_{\delta\varphi}|\Psi\rangle, \qquad \langle\Psi'| = \langle\Psi|\hat{R}^{\dagger}_{\delta\varphi}. \tag{11.18}$$

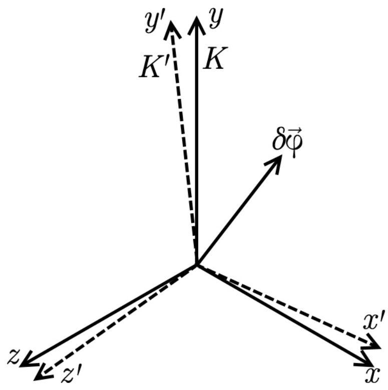

Рис. 11.9.

В новой системе координат K' с новыми волновыми функциями среднее значение

$$\overline{A'} = \langle\Psi'|\hat{\vec{A}}|\Psi'\rangle.$$

Подставляя в это выражение преобразование (11.18), получим:

$$\overline{A'} = \langle\Psi|\hat{R}^{\dagger}_{\delta\varphi}\hat{\vec{A}}\hat{R}_{\delta\varphi}|\Psi\rangle. \tag{11.19}$$

С другой стороны, согласно (11.17)

$$\overline{A'} = \langle\Psi|\hat{\vec{A}} - [\delta\vec{\varphi} \times \hat{\vec{A}}]|\Psi\rangle \tag{11.20}$$

Сравнивая выражения (11.19), (11.20), получим следующую запись:

$$\hat{R}^{\dagger}_{\delta\varphi}\hat{\vec{A}}\hat{R}_{\delta\varphi} = \hat{\vec{A}} - [\delta\vec{\varphi} \times \hat{\vec{A}}] \tag{11.21}$$

Равенство (11.21) для n-ой компоненты примет вид:

$$\hat{R}^{\dagger}_{\delta\varphi}\hat{\vec{A}}_n\hat{R}_{\delta\varphi} = \hat{\vec{A}}_n - [\delta\vec{\varphi} \times \hat{\vec{A}}_n] \tag{11.22}$$

Согласно определению оператора поворота (11.10), левая часть примет вид (суммирование ведется по i):

$$\left(1 - \frac{i}{\hbar}\delta\varphi_i\,\hat{L}_i\right)\hat{A}_n\left(1 + \frac{i}{\hbar}\delta\varphi_i\,\hat{L}_i\right) = \hat{A}_n - [\delta\vec{\varphi}\times\hat{\vec{A}}]_n. \tag{11.23}$$

Из курса теории поля известно, что k-ое значение произведения может быть записано следующим образом:

$$[\delta\vec{\varphi}\times\hat{\vec{A}}]_k = e_{kil}\delta\varphi_i A_l = -e_{ikl}\delta\varphi_i A_l,$$

где e_{ikl} — совершенно антисимметричный тензор.

Раскрыв скобки в левой части (11.23) и пренебрегая квадратичными членами, получим:

$$\hat{A}_k - \frac{i}{\hbar}\{\hat{L}_i\hat{A}_k - \hat{A}_k\hat{L}_i\} = \hat{A}_k - \frac{i}{\hbar}\delta\varphi_i[\hat{L}_i,\hat{A}_k] = \hat{A}_k + e_{ikl}\delta\varphi_i A_l.$$

Сократив на $\hat{A}_k$ в обеих частях этого равенства, получим следующее соотношение:

$$[\hat{L}_i,\hat{A}_k] = i\hbar e_{ikl}A_l. \tag{11.24}$$

Таким образом, коммутатор оператора момента с компонентами вектора выражается следующим образом. В выражении (11.24) содержится коммутация момента и с координатами, и с импульсами, и даже с компонентами момента.

Из формулы (11.24) легко получить следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{cases} [\hat{L}_i,\hat{x}_k] = i\hbar e_{ikl}\hat{x}_l \\ [\hat{L}_i,\hat{p}_k] = i\hbar e_{ikl}\hat{p}_l \\ [\hat{L}_i,\hat{L}_k] = i\hbar e_{ikl}\hat{L}_l \end{cases} \tag{11.25}$$

Эти соотношения также можно было бы вывести, например, воспользовавшись оператором момента $\hat{L}$. Рассмотрим подробнее выражение (11.25), например, для импульса.

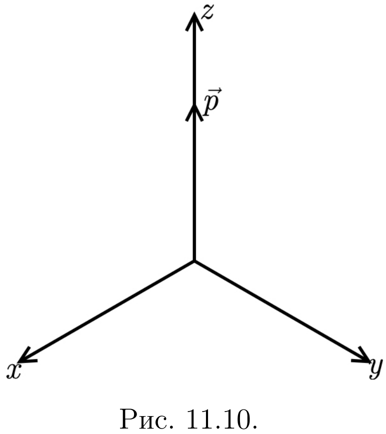

Рис. 11.10.

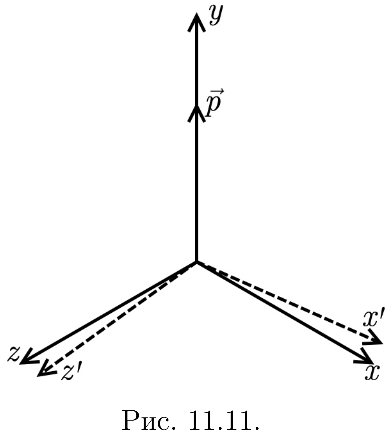

Рис. 11.11.

Компоненты по одному направлению коммутируют:

$$[\hat{L}_x,\hat{p}_x] = [\hat{L}_y,\hat{p}_y] = [\hat{L}_z,\hat{p}_z] = 0,$$

поскольку, если импульс направлен по оси z (см. рис. 11.10), то поворот вокруг оси z не изменяет импульса $\vec{p}$.

Если же компоненты момента количества движения и импульса различны, то они не коммутируют:

$$[\hat{L}_z, \hat{p}_x] = i\hbar\hat{p}_y,$$

то при повороте вокруг оси z ось x смещается к оси y (см. рис. 11.11).

Аналогично надо понимать следующее: возьмем состояние с определенным импульсом p_z, направленным вдоль оси z (см. рис. 11.12). Волновой вектор имеет вид:

$$e^{\frac{ip_z z}{\hbar}},$$

то есть существует плотность потока вероятности через плоскость XY.

Поскольку импульс одинаковый, а плечо (расстояние от точки O до точки приложения импульса) разное, то будут существовать разные моменты относительно осей x и y.

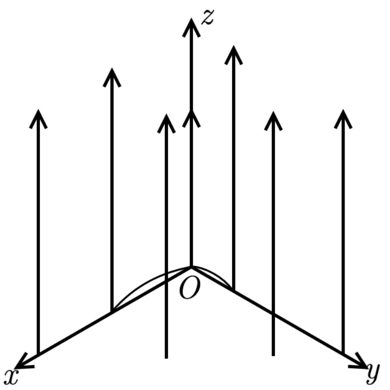

Рис. 11.12.

Следовательно, момент коммутирует с вектором только в случае, когда вращение не меняет направления вектора. Из третьего соотношения в (11.25) видно, что различные компоненты момента не коммутируют между собой.

Составим оператор квадрата момента количества движения:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2.$$

Оказывается, этот оператор $\hat{L}^2$ коммутирует с любой компонентой:

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0.$$

Покажем это. Очевидно,

$$[\hat{L}_z^2, \hat{L}_z] = 0,$$

то есть необходимо показать, что

$$[\hat{L}_x^2, \hat{L}_z] + [\hat{L}_y^2, \hat{L}_z] = 0. \tag{11.26}$$

Каждый из коммутаторов в выражении (11.26) можно преобразовать, воспользовавшись следующим правилом:

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}.$$

Следовательно, выражение (11.26) примет следующий вид:

$$\left\{\hat{L}_x[\hat{L}_x, \hat{L}_z] + [\hat{L}_x, \hat{L}_z]\hat{L}_x\right\} + \left\{\hat{L}_y[\hat{L}_y, \hat{L}_z] + [\hat{L}_y, \hat{L}_z]\hat{L}_y\right\} = 0. \tag{11.27}$$

В этом выражении

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_z] = i\hbar\, e_{132}\hat{L}_y = -i\hbar\hat{L}_y;$$
$$[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\, e_{231}\hat{L}_x = -i\hbar\, e_{213}\hat{L}_x = i\hbar\, e_{123}\hat{L}_x = i\hbar\hat{L}_x.$$

Следовательно, выражение (11.27) примет следующий вид:

$$\left\{-\hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x\right\} + \left\{\hat{L}_y\hat{L}_x + \hat{L}_x\hat{L}_y\right\} = 0,$$

причем каждая из скобок по отдельности, очевидно, не равна нулю.

Аналогичным образом можно доказать, что $\hat{L}^2$ коммутирует с $\hat{L}_x$ и $\hat{L}_y$. Получается, что при определенном квадрате длины вектора сохраняется его проекция на ось z (см. рис. 11.13), то есть в результе вращения вокруг этой оси получается некоторый конус, у которого высота равна L_z, а длина образующей равна $\sqrt{L^2}$.

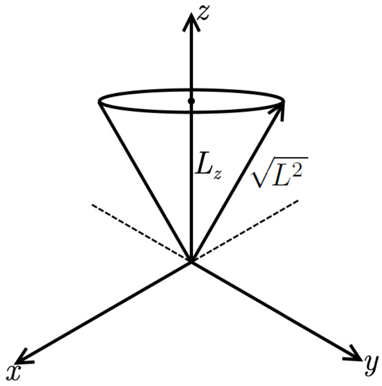

Рис. 11.13.

При этом $\hat{L}_x$ и $\hat{L}_y$ не имеют определенных значений, поскольку они не коммутируют с $\hat{L}_z$.

Поскольку проекции момента количества движения коммутируют с гамильтонианом, то их среднее значение должно быть постоянным. Это среднее значение оказывается равным нулю:

$$\overline{\hat{L}}_x = \overline{\hat{L}}_y = 0.$$

Это легко доказать следующим образом. Рассмотрим следующий коммутатор:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_z] = \hat{L}_x\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_x = i\hbar\, e_{132}\hat{L}_y.$$

Взяв среднее значение от обеих частей этого выражения и учитывая, что

$$\hat{L}_z|\Psi\rangle = \mu|\Psi\rangle,$$

получим:

$$\langle\Psi|\hat{L}_x\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_x|\Psi\rangle = \mu\langle\Psi|\hat{L}_x|\Psi\rangle - \mu\langle\Psi|\hat{L}_x|\Psi\rangle = 0 = -i\hbar\overline{\hat{L}}_y \quad \Rightarrow \quad \overline{L}_y = 0$$