ЛЕКЦИЯ 3

Поляризация. Математический аппарат квантовой механики

3.1. Поляризация

Поскольку «выбивание» фотоэлектронов происходит каждым отдельным фотоном, то каждому фотону можно приписать поляризацию. Рассмотрим способ описания этого явления, не требующий понимания, что такое поляризация фотона как частицы.

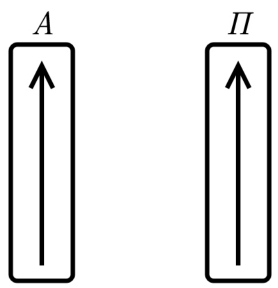

Рис. 3.1.

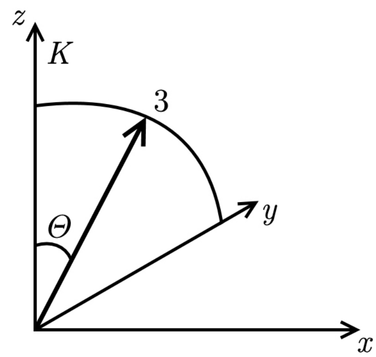

Рис. 3.2.

Поставим один за другим поляризатор (П) и анализатор (А) (см. рис. 3.1). Пусть задана система координат K, и свет распространяется в положительном направлении оси x (см. рис. 3.2).

Пусть анализатор пропускает только свет, поляризованный по оси z. Проведем три различных опыта.

В первом опыте поляризатор поляризует свет так, чтобы направление электрического поля колебалось в направлении оси z. Тогда с вероятностью 1 свет пройдет через анализатор и вызовет фотоэффект.

Во втором опыте анализатор по прежнему пропускает свет, поляризованный по оси z, а поляризация света такова, что направление электрического поля колеблется по направлению оси y (см. рис. 3.3).

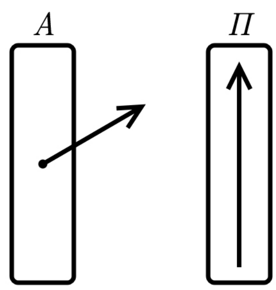

Рис. 3.3.

В этом случае достоверно известно, что свет не пройдет через анализатор. Таким образом, существует два различных состояния:

1) $|\uparrow\rangle$, в котором вектор поляризации направлен вдоль оси z
2) $|\rightarrow\rangle$, в котором свет не пройдет через поляризатор, пропускающий свет вдоль оси z, но пройдет через анализатор, пропускающий свет вдоль оси y.

Таким образом, существуют два состояния, в которых поляризация фотона имеет определенные значения.

На прошлой лекции условились состояние, в котором некоторая физическая величина имеет определенные значения, называть собственными состояниями. Таким образом, существуют два собственных состояния.

Рассмотрим **третий опыт** (см. рис. 3.4). Пусть анализатор по прежнему пропускает свет, направленный вдоль оси z, а вектор поляризации будет направлен как вектор (3) на рисунке 3.2 (этот вектор находится в плоскости zy).

В этом случае фотон с некоторой вероятностью пройдет через анализатор, а с некоторой вероятностью — не пройдет. Если бы рассматривалась электромагнитная волна, то п этом случае

$$\frac{J_\uparrow}{J_{\text{пад}}} = \cos^2\theta, \qquad \frac{J_\rightarrow}{J_{\text{пад}}} = \sin^2\theta,$$

где $J_\uparrow$ — интенсивность прошедшего через анализатор света;

$J_\rightarrow$ — интенсивность света, не прошедшего через анализатор;

$J_{\text{пад}}$ — интенсивность падающего на поляризатор света.

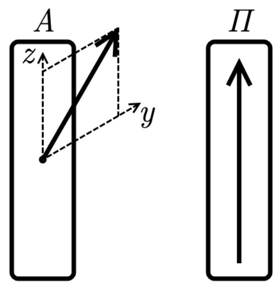

Рис. 3.4.

Это означает, что в третьем опыте состояние $|\nearrow\rangle$ определяется следующим выражением:

$$|\nearrow\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\rightarrow\rangle, \tag{3.1}$$

где c_1^2 и c_2^2 — вероятности соответственно прохождения и непрохождения фотона через поляризатор.

На прошлой лекции было сказано, что значение имеет не только абсолютная величина квадратов модулей коэффициентов c_1 и c_2, но и фаза. Пусть

$$c_2 = c_1 e^{\frac{i\pi}{2}}. \tag{3.2}$$

Попробуем понять, что представляет состояние $|\nearrow\rangle$ в выражении (3.1) в этом случае. Пусть вектор поляризации вращается в плоскости zy (см. рис. 3.5) с частотой ω:

$$\theta = \omega t.$$

В этом случае:

$$c_1 = \cos(\omega t), \qquad c_2 = \sin(\omega t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

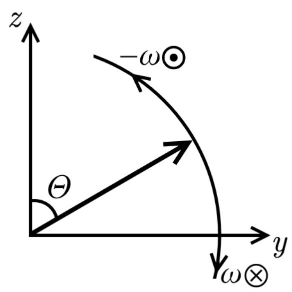

Рис. 3.5.

Если записать c_1 в комплексном виде, то разность фаз между c_1 и c_2 окажется равной $\pi/2$. Если бы вращение вектора поляризации происходило против часовой стрелки, то разность фаз в выражении (3.2) изменила бы знак на противоположный:

$$c_2 = c_1 e^{-\frac{i\pi}{2}}.$$

Это позволяет, например, описать свет, поляризованный по кругу, или эллиптически поляризованный свет. С помощью состояний $|\uparrow\rangle$ и $|\rightarrow\rangle$ можно описать любое состояние поляризации света.

Фотон имеет момент количества движения, направленный строго либо по направлению поля, либо против него. Если момент количества движения направлен по направлению поля, то вектор поляризации вращается согласно правилу правого винта.

Таким образом, у фотона существуют два возможных направления спина и, следовательно, два возможных направления вращения: правое (по часовой стрелке в направлении распространения света) и левое (против часовой стрелки в направлении распространения света).

Из курса оптики известно, что из двух круговых поляризаций всегда можно составить любую линейную поляризацию. Таким образом, с помощью принципа суперпозиции описать на корпускулярном языке (для отдельного фотона), казалось бы, исключительно волновое явление — поляризацию света.

3.2. Математический аппарат квантовой механики

Принцип суперпозиции — основной принцип квантовой механики. Принцип суперпозиции состояний позволяет математический аппарат, соответствующий этому принципу.

Согласно этому принципу, если физическая величина в состояниях $|f_1\rangle, |f_2\rangle, \ldots, |f_n\rangle$ принимает значение $f_1, f_2, \ldots, f_n$, то возможно состояние

$$|X\rangle = \sum_i c_i |f_i\rangle. \tag{3.3}$$

С физической точки зрения смысл символов состояния — принадлежность к определенной волне. С математической точки зрения — состояния можно складывать и умножать на число, как и вектора.

Таким образом, с математической точки зрения произвольное состояние является вектором в том пространстве, где в качестве орт выбраны собственные состояния некой физической величины.

В курсе линейной алгебры операции с векторами производились с действительными коэффициентами. В нашем случае коэффициенты

$$c_1, c_2, \ldots, c_n$$

должны быть комплексными числами, чтобы сохранить разность фаз волны в корпускулярном описании.

Если в выражении (3.3) базисные состояния известны, то коэффициенты c_i задают вектор. В записях удобно пользоваться вектор-столбцами

$$|X\rangle \to \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Здесь для простоты будем считать, что физическая величина принимает дискретное число конечных значений. Пусть есть два вектора

$$|X\rangle \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad |Y\rangle \to \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение векторов $|X\rangle$ и $|Y\rangle$ определяется следующим образом:

$$\langle X|Y\rangle = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \cdots + a_n^* b_n.$$

Это скалярное произведение может быть записано в виде произведения двух матриц:

$$\langle X|Y\rangle = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \dots + a_n^* b_n. \tag{3.4}$$

При этом строку в выражении (3.4) можно обозначить следующим образом:

$$\langle X| \to (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*).$$

Для этих символов существуют специальные названия, которые были введены Дираком:

1) $\langle X|$ — **бра-вектор**;

2) $|Y\rangle$ — **кет-вектор**.

Эти названия произошли от двух частей английского слова «bracket» (скобка). Приведем основные свойства скалярного произведения:

Свойство 3.1. *Скалярное произведение векторов $\langle X|$ и $|Y\rangle$ равно комплексно сопряженному скалярному произведению векторов $\langle Y|$ и $|X\rangle$:*

$$\langle X|Y\rangle = \langle Y|X\rangle^*.$$

Свойство 3.2. *Скалярное произведение линейно по кет-вектору:*

$$\langle X|c_1Y_1 + c_2Y_2\rangle = c_1\langle X|Y_1\rangle + c_2\langle X|Y_2\rangle.$$

Свойство 3.3. *Скалярное произведение антилинейно по бра-вектору:*

$$\langle c_1X_1 + c_2X_2|Y\rangle = c_1^*\langle X_1|Y\rangle + c_2^*\langle X_2|Y\rangle.$$

Свойство 3.4. *Квадратом нормы вектора называется его скалярное произведение самого на себя:*

$$\langle X|X\rangle = N^2 \geqslant 0.$$

Свойство 3.5. *Норма равна нулю для нулевого вектора. Норму любого вектора всегда можно сделать равной единице.*

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad N \equiv 0.$$

Свойство 3.6. *Если*

$$\langle X|Y\rangle = 0,$$

то такие вектора ортогональны.

Свойство 3.7. *Возьмем два вектора состояния $|f_1\rangle$ и $|f_2\rangle$ некоторой физической величины (вектор состояния обозначим с помощью значения физической величины в этом состоянии). Если*

$$|f_1\rangle \neq |f_2\rangle,$$

то такие состояния ортогональны

$$\langle f_1|f_2\rangle = 0.$$

□ Рассмотрим состояние $|f_1\rangle$. По определению в этом состоянии физическая величина с вероятностью 1 равна f_1. Поэтому вероятность того, что в состоянии $|f_1\rangle$ будет получена величина f_2, равна нулю.

Скалярное произведение двух векторов — проекция одного вектора на другой, поэтому для собственных состояний физической величины скалярное произведение окажется равным нулю.■

Следовательно, если записать произвольный вектор состояния как суперпозицию состояний физической величины

$$|X\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i |f_i\rangle, \tag{3.5}$$

то $|f_i\rangle$ будет составлять полный базис в этом пространстве.

Умножив обе части выражения (3.5) на $\langle f_k|$, получим:

$$\langle f_k|X\rangle = \sum_i c_i \langle f_k|f_i\rangle = c_k.$$

Таким образом, в выражении (3.5) коэффициенты c_i — проекции вектора $|X\rangle$ на состояния $|f_i\rangle$:

$$c_i = \langle f_i|X\rangle.$$

В линейной алгебре существуют различные операции над векторами. Если сопоставить вектору $|X\rangle$ вектор $|Y\rangle$ по некоторому закону, что можно записать:

$$|Y\rangle = \hat{O}|X\rangle,$$

где $\hat{O}$ — некоторый оператор.

Существует группа операторов, называемых **линейными операторам**.

Определение 3.1. Пусть существует некоторый оператор $\hat{L}$. Если

$$|Y\rangle = \hat{L}|c_1 X_1 + c_2 X_2\rangle = c_1 \hat{L}|X_2\rangle + c_2 \hat{L}|X_2\rangle,$$

то такой оператор называется линейным.

Докажем следующее утверждение

Утверждение 3.1. Линейный оператор определяется своей матрицей.

□ Пусть вектор $|X\rangle$ задан следующим образом:

$$|X\rangle = \sum_i a_i |f_i\rangle,$$

а получающийся в результате действия на вектор $|X\rangle$ некоторого линейного оператора вектор $|Y\rangle$ равен:

$$|Y\rangle = \sum_k a_k |f_k\rangle.$$

Действуя оператором $\hat{L}$ на вектор $|X\rangle$, получим:

$$|Y\rangle = \hat{L}|X\rangle = \hat{L} \sum_i a_i |f_i\rangle.$$

Воспользовавшись свойством линейности оператора $\hat{L}$, получим:

$$|Y\rangle = \sum_i a_i \hat{L}|f_i\rangle = \sum_k |f_k\rangle$$

Поскольку b_k — проекция f_k на Y, то

$$b_k = \langle f_k|Y\rangle = \sum_i a_i \langle f_k|\hat{L}|f_i\rangle.$$

Выражение $\langle f_k|\hat{L}|f_i\rangle$ — число, поскольку результат действия $\hat{L}|f_i\rangle$ — кет-вектор. Обозначим

$$\langle f_k|\hat{L}|f_i\rangle = L_{ki} \quad \Rightarrow \quad b_k = \sum_i L_{ki} a_i. \tag{3.6}$$

Таким образом, зная a_i и матрицу оператора $\hat{L}$ в базисе данной физической величины, можно по a_i найти b_k, то есть вектору $|X\rangle$ сопоставить вектор $|Y\rangle$.

В матричном виде выражение (3.6) принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \dots\dots & & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Таким образом, выражение (3.6) — выражения для действия линейного оператора, которых характеризуется матрицей L_{ki}.