ЛЕКЦИЯ 8

Одновременная измеримость физический величин. Квантовый осциллятор. Соотношение неопределенностей

8.1. Одновременная измеримость физических величин

В общем случае состояние системы задается не одной величиной, а несколькими, но эти величины должны быть одновременно измеримы. Требования к физической величине заключаются в следующем:
- Наличие у волновой функции состояний, в которых она имеет вполне определенное значение;
- Такие состояния должны составлять полный базис в пространстве собственных векторов: любое другое состояние должно быть суперпозицией базовых состояний.

Если две величины одновременно измеримы, то собственное состояние одной величины является, одновременно, собственным состоянием другой величины. Собственные состояния — собственные вектора операторов, отвечающих соответствующим физическим величинам.

Пусть есть две физические величины, которые отвечают операторам $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Требование одновременной измеримости записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{A}|a,b\rangle &= a|a,b\rangle \\ \hat{B}|a,b\rangle &= b|a,b\rangle \end{aligned} \tag{8.1}$$

Для того, чтобы две физические величины были одновременно измеримы, операторы этих величин должны коммутировать:

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}.$$

Определение 8.1. Разность величин $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ называется **коммутатором**:

$$[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \tag{8.2}$$

Рассмотрим следующее свойство:

Свойство 8.1. *Коммутатор представляет собой антиэрмитов оператор.*

□ Операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ являются операторами некоторых физических величин, поэтому они являются эрмитовыми. Ранее было показано, что

$$(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}\hat{A}.$$

Таким образом, оператор, соответствующий произведению двух операторов — необязательно эрмитов. Он является эрмитовым только в случае, когда

$$(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}\hat{A} = \hat{A}\hat{B}. \tag{8.3}$$

Запишем коммутатор, эрмитово сопряженный к коммутатору (8.2):

$$[\hat{A},\hat{B}]^\dagger = (\hat{A}\hat{B})^\dagger - (\hat{B}\hat{A})^\dagger = \hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B} = -[\hat{A},\hat{B}],$$

то есть коммутатор — антиэрмитов оператор. ■

Следовательно, коммутатор может быть представлен в следующем виде:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}, \quad \hat{C}^\dagger = \hat{C},$$

то есть $\hat{C}$ — эрмитов оператор.

Докажем следующую теорему:

Теорема 8.1. *Для того, чтобы две физические величины были одновременно измеримы, необходимо и достаточно, чтобы их операторы коммутировали (чтобы коммутатор был равен нулю).*

□ Докажем необходимость.

Пусть две физические величины одновременно измеримы, то есть у них имеются общие собственные состояния (8.1). Подействовав на первое выражение в (8.1) слева оператором $\hat{B}$, а на второе выражение в (8.1) слева оператором $\hat{A}$, получим:

$$\hat{B}\hat{A}|a,b\rangle = a\hat{B}|a,b\rangle = ab|a,b\rangle$$
$$\hat{A}\hat{B}|a,b\rangle = b\hat{A}|a,b\rangle = ba|a,b\rangle$$

Разность этих двух выражений окажется равной нулю:

$$(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})|a,b\rangle = (ab - ba)|a,b\rangle = 0. \tag{8.4}$$

Поскольку любое состояние системы $|\Psi\rangle$ может быть представлено как суперпозиция собственных состояний $|a,b\rangle$:

$$|\Psi\rangle = \sum_{a,b} c_{ab}|a,b\rangle,$$

то коммутатором операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ можно подействовать на произвольное состояние $|\Psi\rangle$:

$$[\hat{A}, \hat{B}]|\Psi\rangle = \sum_{a,b}[\hat{A}, \hat{B}]|a,b\rangle = 0|\Psi\rangle = 0,$$

согласно выражению (8.4).

Таким образом, необходимым условием для одновременной измеримости физических величин, то есть наличия у них общих собственных функций, является коммутируемость из операторов.

Докажем теперь достаточность. Пусть коммутатор

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0.$$

Докажем, что в этом случае операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ имеют общие собственные функции. Пусть у оператора $\hat{A}$ есть собственное состояние $|a\rangle$:

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle. \tag{8.5}$$

Подействовав на это состояние оператором $\hat{B}$, а на результат оператором $\hat{A}$, получим, поскольку операторы коммутируют:

$$\hat{A}(\hat{B}|a\rangle) = \hat{B}\hat{A}|a\rangle = a(\hat{B}|a\rangle). \tag{8.6}$$

Таким образом, оператор $\hat{A}$, действуя на вектор $\hat{B}|a\rangle$, возвращает тот же самый вектор с собственным значением a.

Следовательно, результатом действия оператора $\hat{B}$ на собственное состояние $|a\rangle$ является вектор, являющийся собственным состоянием оператора $\hat{A}$.

Возможны два случая. В первом случае a — невырожденное собственное значение, то есть значению $\hat{a}$ соответствует только один собственный вектор $\hat{a}$.

Согласно (8.5), (8.6), существует два собственных вектора, принадлежащих одному невырожденному собственному значению. Следовательно, эти собственные вектора пропорциональны друг другу, то есть

$$\hat{B}|a\rangle = \lambda|a\rangle,$$

где λ — коэффициент пропорциональности.

Второй случай соответствует тому, что a — вырожденное собственное значение, то есть существует несколько собственных векторов

$$|a,\alpha\rangle = |a,1\rangle, |a,2\rangle, \ldots, |a,r\rangle, \qquad \alpha = 1\ldots r, \tag{8.7}$$

где r — кратность вырождения.

Подействовав оператором $\hat{B}$ на собственное состояние $|a,\beta\rangle$

$$\hat{B}|a,\beta\rangle, \qquad 1 \leqslant \beta \leqslant r,$$

получим вектор, который будет собственным вектором оператора $\hat{A}$ (доказательство аналогично первому случаю):

$$\hat{A}(\hat{B}|a,\beta\rangle) = a|a,\gamma\rangle, \qquad 1 \leqslant \gamma \leqslant r.$$

Эта формула отражает факт, что результирующий собственный вектор может быть любым из собственных векторов, отвечающих вырожденному собственному значению, поскольку суперпозиция собственных векторов

$$\sum_{\beta=1}^{r} c_\beta |a,\beta\rangle \tag{8.8}$$

также является собственным вектором оператора $\hat{A}$.

Подействовав оператора $\hat{A}$ на (8.8), получим:

$$\hat{A}\left(\sum_{\beta=1}^{r} c_\beta |a,\beta\rangle\right) = a\sum_{\beta} c_\beta |a,\beta\rangle.$$

Все вектора (8.8), принадлежащие собственному значению a, составляют подпространство, поскольку любая их линейная комбинация дает то же самое собственное значение a. Из этих векторов можно составить комбинацию, которая будет собственным вектором оператора $\hat{B}$:

$$\hat{B}\sum_{\beta} c_\beta |a,\beta\rangle = \lambda \sum_{\alpha'} c'_\alpha |a,\alpha'\rangle. \tag{8.9}$$

Для нахождения искомой линейной комбинации необходимо определить значения коэффициентов c_β. Для этого умножим левую и правую часть выражения (8.9) слева на $|a,\alpha\rangle$. В этом случае в правой части останется только произведение λc_α:

$$\sum_\beta \langle a,\alpha|\hat{B}|a,\beta\rangle c_\beta = \lambda c_\alpha.$$

В этой записи содержится система из r уравнений:

$$\begin{cases} B_{11}c_1 + B_{12}c_2 + \dots + B_{1r}c_r = \lambda c_1 \\ \vdots \\ B_{r1}c_1 + B_{r2}c_2 + \dots + B_{rr}c_r = \lambda c_r \end{cases} \tag{8.10}$$

Для краткости, поскольку a одинаково в бра-векторе и кет-векторе, запишем условие наличия нетривиального решения в следующем виде:

$$\left|B_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta}\right| = 0 \tag{8.11}$$

Относительно λ детерминант (8.11) представляет собой полином степени r

$$P_r(\lambda) = 0,$$

то есть существует r решений

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r,$$

которые будут действительны, поскольку $\hat{B}$ — эрмитов оператор.

Вычислив эти значения и подставляя λ_1 в систему уравнений (8.10), сможем выразить все остальные коэффициенты через c_1:

$$\begin{pmatrix} c_1^{(1)} \\ c_2^{(1)} \\ \vdots \\ c_r^{(1)} \end{pmatrix}$$

где верхний индекс совпадает с индексом подставляемого значения λ.

Величину коэффициента c_r несложно найти, потребовав, чтобы норма соответствующего вектора была равна единице. Аналогично можно из линейных комбинаций собственных векторов оператора $\hat{A}$, принадлежащих определенному вырожденному собственному значению, найти линейные комбинации, которые будут собственными векторами оператора $\hat{B}$. Теорема доказана. ■

С физической точки зрения утверждение теоремы 8.1 понятно: если две физические величины, которым отвечают соответственно операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$, одновременно измеримы, то оператор

$$\hat{A}\hat{B} \text{ — эрмитов.}$$

Это возможно, согласно (8.3), только в том случае, когда

$$\hat{B}\hat{A} = \hat{A}\hat{B} \quad \Rightarrow \quad [\hat{A},\hat{B}] = 0.$$

8.2. Соотношение неопределенностей

Рассмотрим случай, когда физические величины не коммутируют и, следовательно, одновременно не измеримы. В этом случае существует связь между вероятностями разброса этих величин около среднего значения.

Пусть сущесвует некоторое состояние $|\Psi\rangle$, которое можно представить следующим образом:

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i|f_i\rangle, \qquad \hat{f}|f_i\rangle = f_i|f_i\rangle.$$

В этом случае среднее значение величины f определяется следующим образом:

$$\overline{f} = \langle\Psi|\hat{f}|\Psi\rangle = \sum_i |c_i|^2 f_i.$$

Рассмотрим график зависимости вероятности $|c_i|^2$ значений f_i (см. рис. 8.1). Разброс около среднего значения называется **дисперсией**:

$$\delta f = \sum_i |c_i|^2(f_i - \overline{f})^2 = \langle\Psi|(\hat{f} - \overline{f})^2)|\Psi\rangle.$$

Раскрыв скобки в этом выражении, получим следующую формулу:

$$\overline{\hat{f}^2} - 2\overline{f}\,\overline{\hat{f}} + \overline{f}^2 = \overline{\hat{f}^2} - (\overline{f})^2,$$

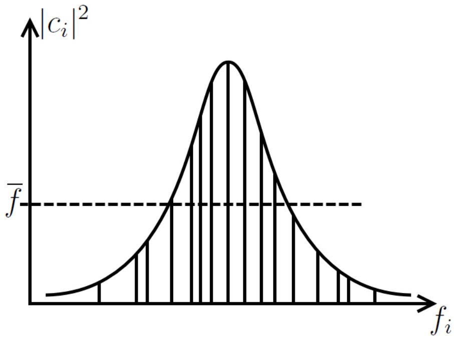

Рис. 8.1.

то есть дисперсия равна разности среднего от квадрата физической величины и квадрата среднего ее значения.

Если две величины не коммутируют, то существует связь между дисперсиями этих двух тел в различных состояниях. Эта связь называется **соотношением неопределенностей**.

В литературе иногда упоминается принцип неопределенности, который не стоит путать с этим соотношением. На лекциях для построения квантовой механики был использован принцип суперпозиции состояний и принцип соответствия. Однако, оказывается, квантовую механику можно построить, пользуясь принципом неопределенностей, что и было сделано Гайзенбергом.

Пусть есть две некоммутирующие величины $\hat{F}$ и $\hat{G}$:

$$[\hat{F}, \hat{G}] = i\hat{C}, \qquad \hat{C}^\dagger = \hat{C},$$

то есть $\hat{C}$ — эрмитов оператор.

Составим операторы $\hat{f}$ и $\hat{g}$ следующим образом:

$$\hat{f} = \hat{F} - \overline{F}, \qquad \hat{g} = \hat{G} - \overline{G}.$$

В этом случае дисперсия операторов $\hat{F}$ и $\hat{G}$ может быть записана следующим образом:

$$\delta F = \overline{\hat{f}^2}, \qquad \delta G = \overline{\hat{g}^2}.$$

Введем также оператор $\hat{A}$ следующим образом:

$$\hat{A} = \hat{f} + (\xi_1 + i\xi_2)\hat{g},$$

где ξ_1, ξ_2 — произвольные действительные числа.

Эрмитово сопряженный оператору $\hat{A}$ оператор $\hat{A}^\dagger$ принимает вид:

$$\hat{A}^\dagger = \hat{f}^\dagger + (\xi_1 - i\xi_2)\hat{g}^\dagger = \hat{f} + (\xi_1 - i\xi_2)\hat{g},$$

поскольку предполагается, что f и g — физические величины, то есть

$$\hat{f}^\dagger = \hat{f}, \qquad \hat{g}^\dagger = \hat{g}.$$

Нетрудно показать, что

$$[\hat{F}, \hat{G}] = [\hat{f} + \overline{F}, \hat{g} + \overline{G}] = [\hat{f}, \hat{g}], \tag{8.12}$$

поскольку число всегда коммутирует с оператором.

С физической точки зрения это понятно, поскольку при параллельном переносе координатной оси x дисперсия не меняется. Рассмотрим среднее значение произведения операторов $\hat{A}^\dagger$ и $\hat{A}$:

$$\overline{\hat{A}^\dagger \hat{A}} = \langle \Psi | \hat{A}^\dagger \hat{A} | \Psi \rangle = \langle \hat{A}\Psi | \hat{A}\Psi \rangle \geqslant 0,$$

поскольку

$$\langle \hat{A}\Psi | \hat{A}\Psi \rangle$$

есть скалярное произведение вектора с самим собой.

Воспользовавшись выражением оператора $\hat{A}$ через $\hat{f}$ и $\hat{g}$? получим:

$$\begin{aligned}\overline{\hat{A}^\dagger \hat{A}} = \overline{\hat{f}^2} + (\xi_1^2 + \xi_2^2)\overline{\hat{g}^2} + \xi_1 \overline{(\hat{f}\hat{g} + \hat{g}\hat{f})} + i\xi_2 \overline{(\hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f})} = \\ = \delta f + \delta g(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_1 \overline{(\hat{f}\hat{g} + \hat{g}\hat{f})} - \xi_2 \overline{\hat{C}},\end{aligned} \tag{8.13}$$

где

$$i\hat{C} = [\hat{f}, \hat{g}].$$

Выражение (8.13), очевидно, должно быть неотрицательным. Для того, чтобы получить условие, при котором квадратичная форма будет неотрицательна, выделим в (8.13) полный квадрат:

$$\overline{\hat{A}^\dagger \hat{A}} = \delta f + \left(\xi_1\sqrt{\delta g} + \frac{\overline{\hat{f}\hat{g} + \hat{g}\hat{f}}}{2\sqrt{\delta g}}\right)^2 - \frac{\left(\overline{\hat{f}\hat{g} + \hat{g}\hat{f}}\right)^2}{4\,\delta g} + \left(\xi_2\sqrt{\delta g} - \frac{\overline{\hat{C}}}{2\sqrt{\delta g}}\right)^2 - \frac{\left(\overline{\hat{C}}\right)^2}{4\,\delta g} \geqslant 0.$$

Введем оператор:

$$\hat{r} = \frac{\hat{f}\hat{g} + \hat{g}\hat{f}}{2\sqrt{\delta g}\sqrt{\delta f}}.$$

В этом случае неравенство примет следующий вид:

$$\delta f(1 - \overline{\hat{r}}^2) \geqslant \frac{\left(\overline{\hat{C}}\right)^2}{4\,\delta g} \quad \Rightarrow \quad \delta f\,\delta g \geqslant \frac{\left|\overline{[\hat{f}, \hat{g}]}\right|^2}{4(1 - \overline{\hat{r}}^2)}. \tag{8.14}$$

Нетрудно показать, что

$$\overline{\hat{r}}^2 \leqslant 1. \tag{8.15}$$

Для этого необходимо составить оператор $\hat{B}$

$$\hat{B} = \hat{f} + \xi_2 \hat{g}.$$

Затем нетрудно показать, что условие

$$\hat{B}^\dagger \hat{B} \geqslant 0$$

равносильно искомому условию (8.15).

Следовательно, неравенство (8.14) можно усилить следующим образом:

$$\delta f\,\delta g \geqslant \frac{\left|\overline{[\hat{f}, \hat{g}]}\right|^2}{4}.$$

Величину $\overline{\hat{r}}$ принято называть **регрессией**. Рассмотрим ее физический смысл. Если бы физические величины f и g были независимы, то, согласно введенному определению,

$$\overline{\hat{r}} = 0.$$

Если же величины не независимы, то произведение операторов физических величин может оказаться не равным нулю. При переходе от классической механики к квантовой гамильтониан строится следующим образом: соответствующие классические физические величины заменяются на их операторы.

Если в классических величинах встречается произведение двух физических величин A и B, а операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$, отвечающие этим величинам, не коммутируют, то переход к гамильтониану осуществлется следующим образом:

$$AB \to \frac{\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}}{2},$$

поскольку в этом случае оператор в правой части — эрмитов.

Воспользовавшись этими рассуждениями легко показать, что оператор $\hat{r}$ — эрмитов оператор. Выражение (8.14), согласно (8.12) и тому, что

$$\delta F = \delta f, \qquad \delta G = \delta g$$

запишется следующим образом:

$$\delta F\,\delta G \geqslant \frac{\left|\overline{[\hat{F}, \hat{G}]}\right|^2}{4}. \tag{8.16}$$

Пример 8.1. Соотношение неопределенностей между координатой и импульсом в соответствующем направлении легко получить из (8.16). Операторы $\hat{p}_x$ и x не коммутируют

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] \neq 0.$$

Найдем этот коммутатор. Для этого подействуем этим коммутатором на вектор состояния $|\Psi\rangle$ в конфигурационном представлении:

$$|\Psi\rangle = \sum_x \psi(x)|x\rangle. \tag{8.17}$$

Получим, что

$$[\hat{p}_x, \hat{x}]|\Psi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\Psi) - \left(x(-i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial x})\right) =$$
$$= -i\hbar\Psi - i\hbar x\frac{\partial\Psi}{\partial x} + i\hbar x\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -i\hbar\Psi \quad \Rightarrow \quad [\hat{p}_x, \hat{x}] = -i\hbar. \quad (8.18)$$

От выбора представления результат действия коммутатора не зависит. В импульсном представлении (p-представлении):

$$\hat{p}_x = p_x, \qquad \hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x}.$$

Подействовав этим коммутатором на волновую функцию в p-представлении

$$|\Psi\rangle = \sum_p a(p)|p\rangle,$$

получим тот же результат, что и в (8.18).

Следовательно, соотношение неопределенностей (8.16) примет следующий вид:

$$\delta x\delta p = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (8.19)$$

В случае, когда операторы $\hat{F}$ и G соответствуют операторам координаты и импульса, соотношение (8.19) надо понимать следующим образом.

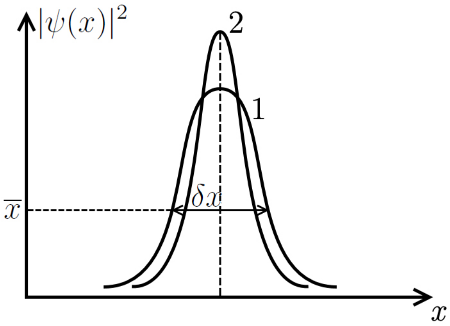

Рис. 8.2.

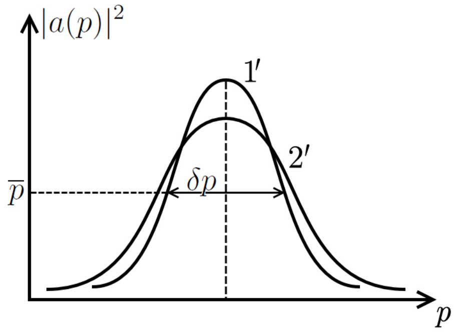

Рис. 8.3.

Пусть распределение вероятности нахождения физической величины в некоторой точке пространства (в конфигурационном представлении) имеет некоторое среднее значение $\overline{x}$ и дисперсию δx (см. рис. 8.2). Вероятность оюнаружить частицу с некоторым импульсом (в импульсном представлении) (см. рис. 8.3) также имеет среднее значение $\overline{p}$ и дисперсию δp.

Если «сжимать» распределение в конфигурационном представлении ($1 \to 2$), то в импульсном представлении это распределение будет расширяться ($1' \to 2'$). Таким образом, соотношение неопределенности в случае, если две величины не коммутируют приводит к тому, что уменьшение разброса одной некоммутирующей величины приводит к увеличению разброса другой некоммутирующей величины.

По порядку величины всегда можно считать, что

$$\Delta p\Delta x \sim \hbar.$$

8.3. Квантовый осциллятор

Задача о квантовом осцилляторе исторически имеет важное значение: изучая эту задачу, Гайзенберг открыл квантовую механику. Если частица находится в некотором потенциальном поле в равновесии, то состояние равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии.

Вблизи минимума отклонение всегда можно представить в виде квадратичной аппроксимации:

$$V(x) = \frac{kx^2}{2}. \tag{8.20}$$

В классическом случае уравнение колебаний имеет следующий вид:

$$m\ddot{x} = kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Потенциал (8.20) в этом случае удобно выразить следующим образом:

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2.$$

Пусть есть некоторой параболический потенциал $V(x)$ (см. рис. 8.4). На прошлых лекциях были рассмотрены три случая движения частицы в зависимости от ее энергии по отношению к значениям потенциала V_1 и V_2 на бесконечности:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I}: & E > V_2 \geqslant V_1 \\ \mathrm{II}: & V_2 > E > V_1 \\ \mathrm{III}: & V_2 \geqslant V_1 > E \end{array}$$

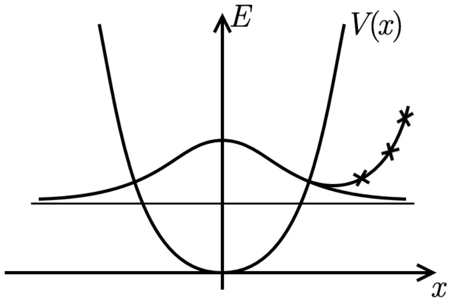

Рис. 8.4.

При движении в параболической потенциальной яме реализуется случай III, то есть возможны только дискретные уровни энергии, поскольку значение потенциалов V_1 и V_2 стремится к $+\infty$ (см. рис. 8.5).

Уравнение Шредингера примет следующий вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\Psi = E\Psi.$$

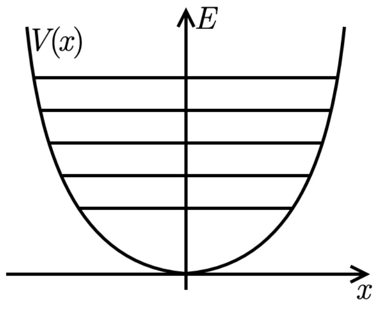

Рис. 8.5.

Существует правило, согласно которому при решении задач удобно пользоваться безразмерными переменными. Размерность энергии и импульса:

$$[E_0] = \hbar\omega \quad \Rightarrow \quad [p_0] \simeq \sqrt{mE} = \sqrt{m\hbar\omega}. \tag{8.21}$$

Следовательно, размерность координаты имеет следующий вид:

$$[x_0] = \left[\frac{\hbar}{p}\right] = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}. \tag{8.22}$$

Если гамильтониан записан следующим образом (будем решать задачу в конфигурационном представлении):

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2, \tag{8.23}$$

то удобно ввести следующие безразмерные величины:

$$\hat{Q} = \frac{\hat{x}}{x_0}, \qquad \hat{\mathcal{P}} = \frac{\hat{p}}{p_0}.$$

Гамильтониан (8.23) в этом случае примет следующий вид:

$$\hat{H} = \frac{m\hbar\omega}{2m}\hat{\mathcal{P}}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \cdot \frac{\hbar}{m\omega}\hat{Q}^2 = \frac{1}{2}\,\hbar\omega(\hat{\mathcal{P}}^2 + \hat{Q}^2).$$

Поскольку гамильтониан имеет размерность энергии, то есть измеряется в $\hbar\omega$, можно записать:

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{H}_0, \qquad \hat{H}_0 = \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{P}}^2 + \hat{Q}^2).$$

В дальнейшем при решении уравнения необходимо учитывать, что экспоненциально растущее решение на обоих концах должно отсутствовать (см. рис. **??**). Будем решать эту задачу не прямым интегрированием, а другим способом, который понадобится также в следующем семестре, когда будет рассмотрено излучение.

Будем искать решение уравнения

$$\hat{H}_0|\Psi\rangle = \mathcal{E}|\Psi\rangle.$$

Введем два оператора:

$$\hat{a} = \frac{\hat{Q} + i\hat{\mathcal{P}}}{\sqrt{2}}, \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{Q} - i\hat{\mathcal{P}}}{\sqrt{2}}. \tag{8.24}$$

В классическом представлении, если $\hat{Q}$ имеет размерность координаты, а $\hat{\mathcal{P}}$ — размерность импульса, то

$$a \sim e^{-i\omega t}, \qquad a^\dagger \sim e^{i\omega t},$$

то есть будут соответствовать экспоненциально растущему и падающему решению.

Для операторов $\hat{\mathcal{P}}$ и $\hat{Q}$ выполняется соотношение неопределенностей. Коммутатор этих операторов, согласно (8.21), (8.22) и (8.18), равен:

$$[\hat{\mathcal{P}}, \hat{Q}] = \frac{[\hat{p}_x, \hat{x}]}{\sqrt{m\hbar\omega} \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}} = \frac{[\hat{p}_x, \hat{x}]}{\hbar} = -\frac{i\hbar}{\hbar} = -i.$$

Произведение операторов, согласно (8.24), примет следующий вид:

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{Q}^2 + \hat{\mathcal{P}}^2 + i[\hat{\mathcal{P}}, \hat{Q}]}{2} = \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{P}}^2 + \hat{Q}^2 + 1). \tag{8.25}$$

Переставив местами операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$, получим:

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{\hat{\mathcal{P}}^2 + \hat{Q}^2 + i[\hat{Q}, \hat{\mathcal{P}}]}{2} = \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{P}}^2 + \hat{Q}^2 - 1) \tag{8.26}$$

Вычтя из (8.25) выражение (8.26), получим значение коммутатора операторов $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1.$$

Из этих соотношений видно, что безразмерный гамильтониан $\hat{H}_0$ может быть записан в следующем виде:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{P}}^2 + \hat{Q}^2) = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}.$$

Для нахождения среднего значения оператора

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

будем искать решение следующего уравнения:

$$\hat{N}|\Psi\rangle = \lambda|\Psi\rangle.$$

Умножив левую и правую его часть на $\langle\Psi|$, получим, что:

$$\langle\Psi|\hat{N}|\Psi\rangle = \lambda\langle\Psi|\Psi\rangle \geqslant 0,$$

так как $\langle\Psi|\Psi\rangle$ — скалярное произведение вектора состояния на самого себя.

На следующей лекции продолжим это рассуждение и увидим, что можно, не решая уравнения Шредингера, получит спектр энергий и, следовательно, волновые функции осциллятора.

Такое рассмотрение важно, поскольку в дальнейшем при рассмотрении осцилляторов в электромагнитном поле, действие оператора $\hat{a}^\dagger$ на систему будет соответствовать рождению фотона. Действие оператора $\hat{a}$ на систему будет соответствовать поглощению фотона, а оператор $\hat{N}$ будет соответствовать среднему числу фотонов.