

Спектральный анализ электрических сигналов

_____ группа
"___" _____ 20__

I. Аннотация

В работе с помощью спектрального анализатора исследуются спектры различных периодических сигналов: периодической последовательности прямоугольных импульсов, периодической последовательности цугов гармонических колебаний и гармонического сигнала, модулированного по амплитуде другим гармоническим сигналом. При этом проводится проверка различных физических зависимостей.

II. Теоретические сведения

A. Преобразование Фурье периодической функции

Пусть функция $f(t)$ периодична с частотой $\Omega = \frac{2\pi}{T}$. Она раскладывается в следующий ряд, называемый рядом Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\Omega t} \quad (1)$$

Комплексные амплитуды спектральных составляющих A_n вычисляются по формулам

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\Omega t} dt \quad (2)$$

Если функция четна, то ее ряд Фурье можно представить в виде

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) \quad (3)$$

Здесь

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\Omega t) dt \quad (4)$$

B. Преобразование Фурье непериодической функции

Пусть сигнал $f(t)$ отличен от нуля в конечном интервале времени $t_1 < t < t_2$. Превратим функцию в периодическую путем повторения ее с периодом $T > t_2 - t_1$. Для этой функции применимо разложение в ряд Фурье по формулам 1 и 2. Модуль комплексной амплитуды A_n обратно пропорционален T . Поэтому при устремлении T к бесконечности амплитуды стремятся к нулю, как и расстояние между соседними спектральными компонентами.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Omega}{2\pi} \left(\int_{t_1}^{t_2} f(t') e^{-in\Omega t'} dt' \right) e^{in\Omega t} \quad (5)$$

При $T \rightarrow \infty$, $\Omega \rightarrow 0$, Ω превращается в $d\Omega$, $n\Omega$ превращается в текущую частоту Ω . В результате получим:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{t_1}^{t_2} f(t') e^{-i\Omega t'} dt' \right) e^{i\Omega t} d\Omega \quad (6)$$

Внутренний интеграл обозначим

$$F(\Omega) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (7)$$

$F(\Omega)$ называется спектральной характеристикой функции.

Сравнивая выражения 2 и 7, получим связь между спектральной характеристикой непериодической функции и такой же функции, но периодической с частотой Ω_1 :

$$F(n\Omega_1) = \pi \frac{A_n}{\Omega_1} \quad (8)$$

Таким образом, спектр непериодической функции и огибающая спектра периодической функции совпадают по форме и отличаются только масштабом.

C. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

Пусть функция $V(t)$ является периодической последовательностью прямоугольных импульсов (рис. 1).

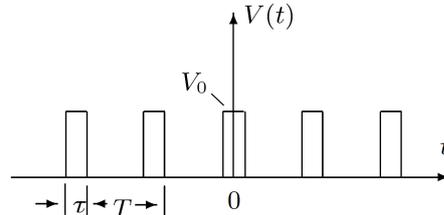


Рис. 1. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

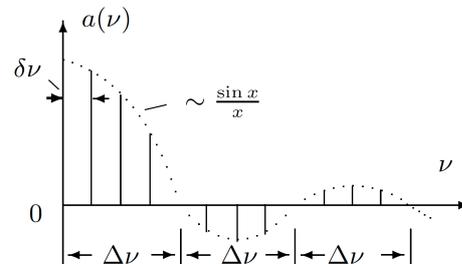


Рис. 2. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

Найдем ее спектр. По формуле 2,

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^\tau V_0 e^{-in\Omega t} dt = -\frac{2V_0}{in\Omega T} (e^{-\frac{in\Omega\tau}{2}} - e^{\frac{in\Omega\tau}{2}}) = \frac{2V_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) = \frac{\Omega\tau V_0}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) = \frac{\Omega\tau V_0}{\pi} \operatorname{sinc} x \quad (9)$$

Здесь $x = \frac{n\Omega\tau}{2}$.

Он изображен на рисунке 2.

Ширина центральной части спектра равна

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau} \quad (10)$$

Получаем соотношение неопределенностей:

$$\tau\Delta\nu = 1 \quad (11)$$

D. Спектр периодической последовательности гармонических цугов

Пусть функция $V(t)$ является последовательностью гармонических цугов частоты ω_0 (рис. 3).

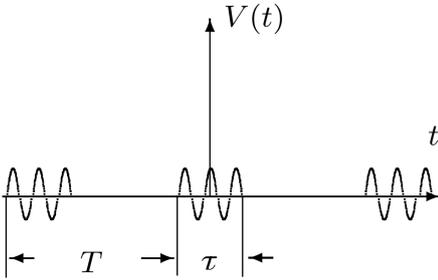


Рис. 3. Периодическая последовательность гармонических цугов

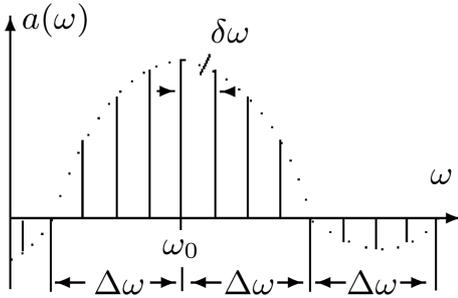


Рис. 4. Спектр периодической последовательности гармонических цугов

Функция четная.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cos(n\Omega t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} (\operatorname{sinc}[(\omega_0 - n\Omega)\tau/2] + \operatorname{sinc}[(\omega_0 + n\Omega)\tau/2]) \quad (12)$$

Спектр этой функции аналогичен спектру периодической последовательности прямоугольных импульсов, сдвинутой на ω_0 .

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad (13)$$

E. Амплитудно-модулированные колебания

Рассмотрим колебания постоянной высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой Ω .

$$V(t) = A_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t \quad (14)$$

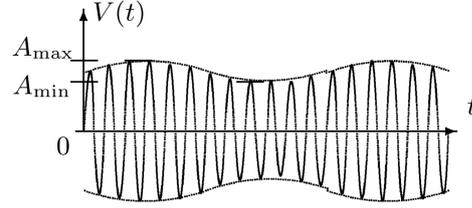


Рис. 5. График амплитудно-модулированных колебаний

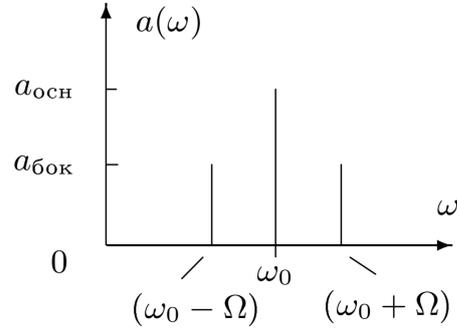


Рис. 6. Спектр амплитудно-модулированных колебаний

Коэффициент m называют глубиной модуляции. Преобразовав $V(t)$, получим:

$$V(t) = A_0 \cos \omega_0 t + m \cos \Omega t \cos \omega_0 t = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t \quad (15)$$

Видно, что спектр состоит из трех компонент: основной с частотой ω_0 и амплитудой $a_{\text{осн}} = A_0$, и двух боковых с частотами $\omega_0 - \Omega$ и $\omega_0 + \Omega$ и амплитудами $a_{\text{бок}} = \frac{A_0 m}{2}$.

III. Методика измерений

А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Для исследования спектра прямоугольных импульсов используется установка, изображенная на рисунке 7.

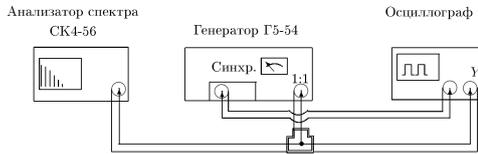


Рис. 7. Установка для исследования спектра прямоугольных импульсов

В этой части работы будем использовать обозначения: $f_{\text{повт}}$ - частота повторения сигнала, τ - длительность импульса, $\Delta\nu$ - ширина спектра, $\delta\nu$ - расстояние между соседними спектральными компонентами.

План проведения эксперимента:

- 1) На анализаторе спектра устанавливается режим работы с однократной разверткой и снимается спектр импульсов для $f_{\text{повт}} = 10^3 \text{ Гц}$, $\tau = 25 \text{ мкс}$.
- 2) Исследуется изменение спектра при изменении τ и $f_{\text{повт}}$ в два раза.
- 3) Снимается зависимость ширины спектра от длительности импульса в диапазоне τ 25-200 мкс при $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$.
- 4) Строится график $\Delta\nu(1/\tau)$ и проверяется соотношение неопределенностей.

В. Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

Для исследования спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний используется установка, изображенная на рисунке 8.

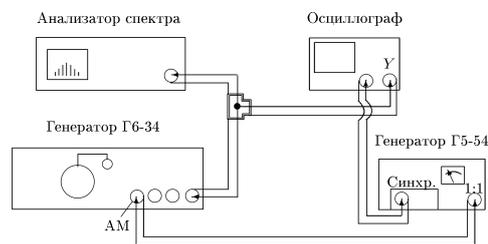


Рис. 8. Установка для исследования спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

В этой части работы будем использовать обозначения: $f_{\text{повт}}$ - частота повторения сигнала, τ - длительность цуга, ν_0 - несущая частота, $\delta\nu$ - расстояние между соседними спектральными компонентами, $\Delta\nu$ - ширина спектра, $(\nu_0)_c$ - частота центра спектра.

План проведения эксперимента:

- 1) Для $\omega_0 = 25 \text{ кГц}$ исследуется изменение спектра при изменении τ и ν_0 .
- 2) При фиксированной τ исследуется зависимость расстояния $\delta\nu$ между соседними спектральными компонентами от частоты повторения сигналов $f_{\text{повт}}$.
- 3) Строится график $\delta\nu(f_{\text{повт}})$.

С. Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Для исследования спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде используется установка, изображенная на рисунке 9.

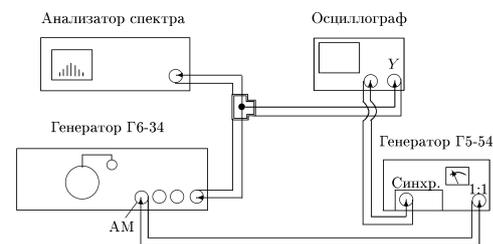


Рис. 9. Установка для исследования спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

В этой части работы будем использовать обозначения: ν_0 - частота модуляции, ν - несущая частота, m - глубина модуляции, $a_{\text{бок}}$ - высота боковых частей спектра, $a_{\text{осн}}$ - высота центральной части спектра.

План проведения эксперимента:

- 1) Исследуется спектр при $\nu_0 = 1 \text{ кГц}$, $\nu = 25 \text{ кГц}$.
- 2) Исследуется зависимость отношения амплитуды боковой линии спектра к амплитуде основной линии $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от глубины модуляции m .
- 3) Строится график $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ в зависимости от m , по которому проводится проверка соотношения $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}} = \frac{m}{2}$.
- 4) При 100% глубине модуляции исследуется изменение спектра при увеличении частоты модулирующего сигнала.

IV. Список оборудования

В работе используются: анализатор спектра, генератор сигналов специальной формы, генератор прямоугольных импульсов, осциллограф

V. Результаты эксперимента

A. Исследование спектра периодической последовательности периодических импульсов

- 1) Для прямоугольных импульсов с $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 25$ мкс (рис. 10) получен спектр, приведенный на рис. 11. При повышении длительности импульса τ вдвое ширина огибающей спектра уменьшается в два раза, при этом расстояние между соседними спектральными компонентами не меняется (рис. 13). При повышении частоты повторения импульса $f_{\text{повт}}$ в два раза расстояние между соседними спектральными компонентами увеличивается в два раза, при этом ширина огибающей не меняется (рис. 12).

Таблица I

Зависимость параметров спектра от $f_{\text{повт}}$ для прямоугольных импульсов

$f_{\text{повт}}$, кГц	τ , мкс	$\Delta\nu$, кГц	$\delta\nu$, кГц
1,0	25	35	1,0
2,0	25	35	2,0

- 2) Были проведены измерения зависимости ширины спектра от длительности импульса $\Delta\nu(\tau)$ для τ от 25 до 200 мкс с шагом в 25 мкс. Для более высокой точности измерения ширины для τ от 75 мкс до 200 мкс измерялись расстояния между наиболее удаленными максимумами огибающей линии спектра (не считая первого максимума), и делились на количество минимумов между ними. Из-за того, что анализатор спектра "срезает" недостаточно высокие максимумы, амплитуда сигнала устанавливалась достаточно высокой для того, чтобы были видны все максимумы. Примеры спектров приведены на рисунках 11, 13, 14 и 15. Результаты измерений приведены в таблице II.

Таблица II
Зависимость $\Delta\nu(\tau)$

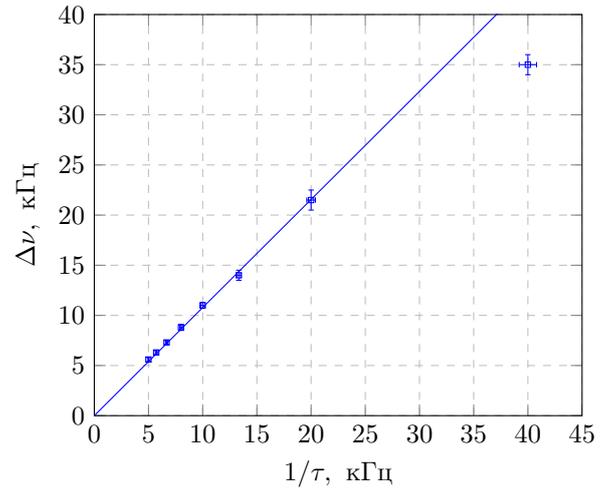
τ , мкс	$\Delta\nu$, кГц	$\delta\tau$, мкс	$\delta\Delta\nu$, кГц
25	35,0	0,5	1,0
50	21,5	1,0	1,0
75	14,0	1,0	0,5
100	11,0	2,0	0,3
125	8,8	2,0	0,3
150	7,3	2,0	0,2
175	6,3	2,0	0,2
200	5,6	2,0	0,2

- 3) Построим график зависимости $\Delta\nu$ от $1/\tau$. Данные для графика приведены в таблице III.

Таблица III
Зависимость $\Delta\nu(1/\tau)$

$1/\tau$, кГц	$\Delta\nu$, кГц	$\delta_{1/\tau}$, кГц	$\delta\Delta\nu$, кГц
40,00	35,0	0,80	1,0
20,00	21,5	0,40	1,0
13,33	14,0	0,18	0,5
10,00	11,0	0,20	0,3
8,00	8,8	0,13	0,3
6,67	7,3	0,09	0,2
5,71	6,3	0,07	0,2
5,00	5,6	0,05	0,2

Зависимость $\Delta\nu(1/\tau)$



Из графика видно, что точка $\tau = 25$ мс является выбросом. Если ее исключить, то точки очень хорошо ложатся на прямую. Из МНК коэффициент углового наклона графика равен $\alpha = 1,078 \pm 0,014$. Выходящее за рамки погрешности отличие α от 1 можно объяснить систематической неточностью спектрографа или погрешностью выдаваемой генератором частоты импульса. Таким образом, можно заключить, что соотношение неопределенностей выполняется с очень хорошей точностью.

B. Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонического сигнала

- 1) Получены спектры для периодической последовательности цугов гармонического сигнала при следующих параметрах:

$f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 50$ мкс, $\nu_0 = 25$ кГц - рис. 17;
 $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 100$ мкс, $\nu_0 = 25$ кГц - рис. 18;
 $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 50$ мкс, $\nu_0 = 10$ кГц - рис. 19;
 $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 50$ мкс, $\nu_0 = 40$ кГц - рис. 20.

На всех спектрах частота в центре оси x равна 25 кГц. Зависимость параметров спектра от продолжительности цуга и несущей частоты приведена в таблице IV. Видно, что при изменении несущей частоты смещается центральный максимум (расположенный на частоте, равной несущей), а при изменении продолжительности цуга меняется ширина огибающей линии спектра. Эти результаты

согласуются с теорией.

Таблица IV
Зависимость параметров спектра от параметров сигнала для периодических цугов

$f_{\text{повт}}$, кГц	τ , мкс	ν_0 , кГц	$\delta\nu$, кГц	$\Delta\nu$, кГц	$(\nu_0)_c$, кГц
1	50	25	1,1	38	25
1	100	25	1,1	20	25
1	50	10	1,1	38	10
1	50	40	1,1	38	40

- 2) Были проведены измерения зависимости расстояния между соседними спектральными компонентами $\delta\nu$ от частоты повторения сигналов $f_{\text{повт}}$ в диапазоне от 1 кГц до 8 кГц с шагом в 1 кГц при $\tau = 50$ мкс, $\nu_0 = 25$ кГц. Результаты измерений приведены в таблице V.

Таблица V
Зависимость $\delta\nu(f_{\text{повт}})$ для периодических цугов

$f_{\text{повт}}$, кГц	$\delta\nu$, кГц	$\Delta f_{\text{повт}}$, кГц	$\Delta\delta\nu$, кГц
1,0	1,2	0,04	0,1
2,0	2,4	0,04	0,2
3,0	3,6	0,08	0,2
4,0	4,8	0,08	0,2
5,0	6,0	0,08	0,2
6,0	7,2	0,08	0,2
7,0	8,5	0,08	0,5
8,0	9,5	0,08	0,5

- 3) График зависимости $\delta\nu$ от $f_{\text{повт}}$:
Зависимость $\delta\nu$ от $f_{\text{повт}}$

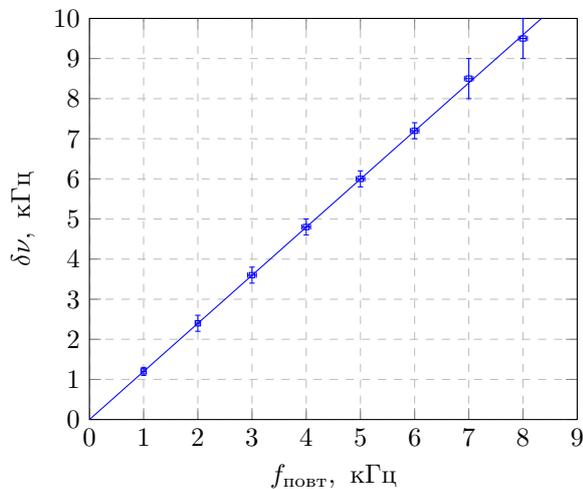


График линеен. Коэффициент углового наклона равен $1,20 \pm 0,07$, что близко к 1. Скорее всего, результат отличается от единицы по той же причине, по которой угловой коэффициент в первой части отличался от 1. Можно заключить, что закон $\delta\nu = f_{\text{повт}}$ выполняется с достаточно высокой точностью.

- 4) Из рисунков 11 и 17 видно, что спектры прямоугольных импульсов и цугов при одинаковой частоте повторения и продолжительности похожи, но смещены друг относительно друга на несущую

частоту цуга.

С. Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

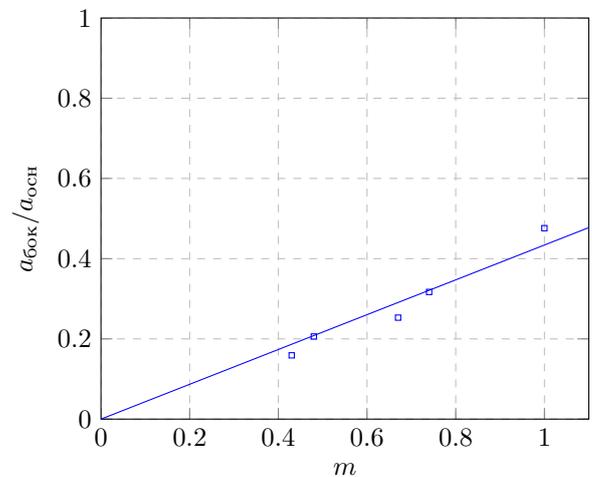
- 1) Зависимость отношения $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от глубины модуляции m приведена в таблице VI.

Таблица VI
Зависимость $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m

m	$a_{\text{осн}}$, у.е.	$a_{\text{бок}}$, у.е.	$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$
0,43	6,3	1,0	0,159
0,48	6,3	1,3	0,206
0,67	6,3	1,6	0,253
0,74	6,3	2,0	0,317
1,00	6,3	3,0	0,476

- 2) График зависимости отношения $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от глубины модуляции m :

Зависимость $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m



Из МНК, угловой коэффициент наклона графика равен $k = 0,43 \pm 0,05$, что близко к теоретическому значению $k_{\text{теор}} = 0,5$.

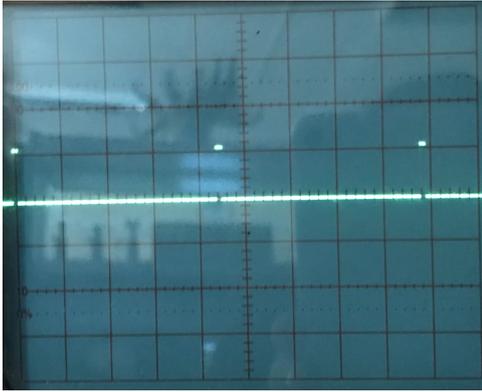
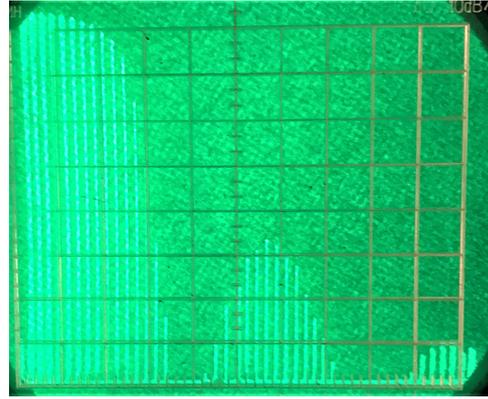
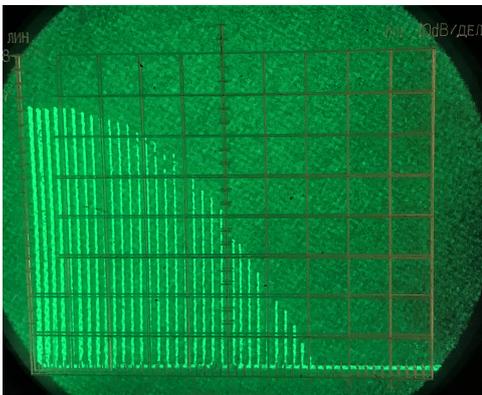
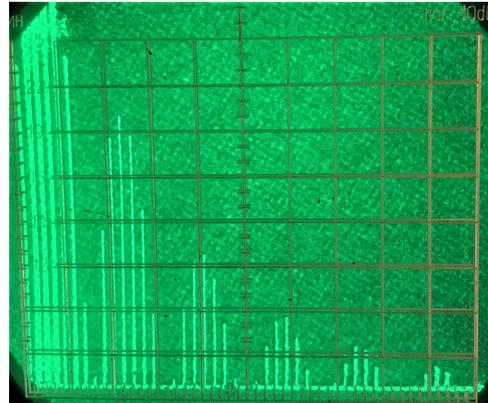
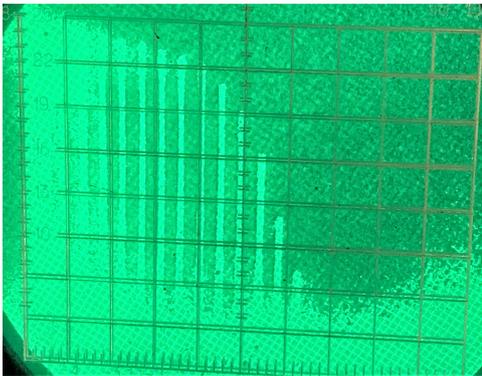
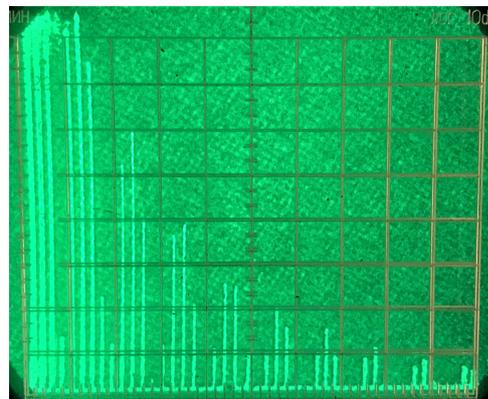
- 3) Из сравнения рисунков 23 и 24 видно, что при увеличении частоты модуляции вдвое расстояние между основной спектральной компонентой и боковыми также увеличивается вдвое.

VI. Вывод

На примере трех различных форм входных сигналов были экспериментально проверены и подтверждены следующие физические закономерности:

- 1) Соотношение неопределенности $\Delta\nu\Delta\tau = 1$;
- 2) Равенство расстояния между соседними спектральными линиями периодического сигнала и частотой его повторения;
- 3) Соотношение $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}} = \frac{m}{2}$ для амплитудно-модулированного гармонического сигнала.

VII. Изображения сигналов и их спектров

Рис. 10. Прямоугольные импульсы; $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 25 \text{ мкс}$ Рис. 13. Спектр прямоугольных импульсов; $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 50 \text{ мкс}$, $m_x = 5 \text{ кГц}$ Рис. 11. Спектр прямоугольных импульсов; $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 25 \text{ мкс}$, $m_x = 5 \text{ кГц}$ Рис. 14. Спектр прямоугольных импульсов; $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 150 \text{ мкс}$, $m_x = 5 \text{ кГц}$ Рис. 12. Спектр прямоугольных импульсов; $f_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$, $\tau = 25 \text{ мкс}$, $m_x = 5 \text{ кГц}$ Рис. 15. Спектр прямоугольных импульсов; $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 200 \text{ мкс}$, $m_x = 5 \text{ кГц}$

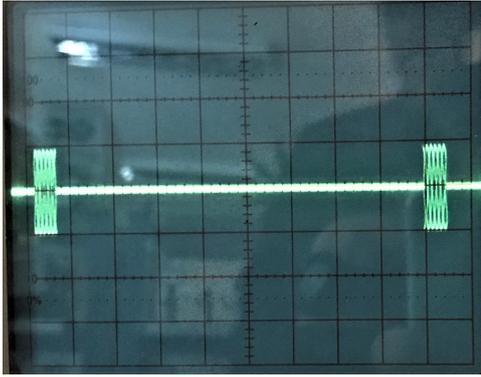


Рис. 16. Периодические цуги гармонического сигнала; $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 50$ мкс, $\nu_0 = 25$ кГц

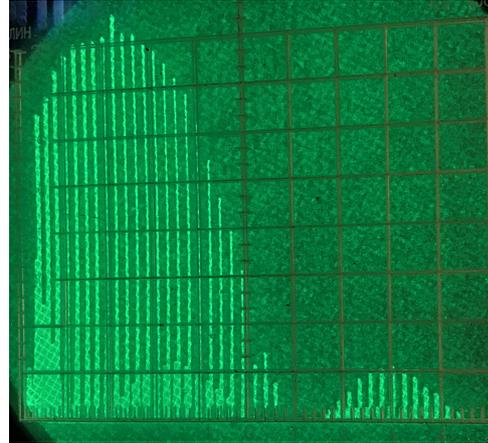


Рис. 19. Спектр периодических цугов гармонического сигнала; $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 50$ мкс, $\nu_0 = 10$ кГц, $m_x = 5$ кГц

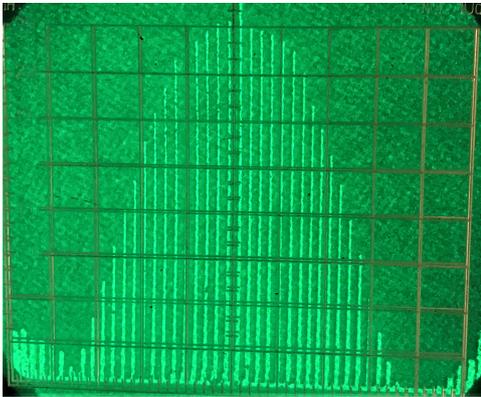


Рис. 17. Спектр периодических цугов гармонического сигнала; $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 50$ мкс, $\nu_0 = 25$ кГц, $m_x = 5$ кГц

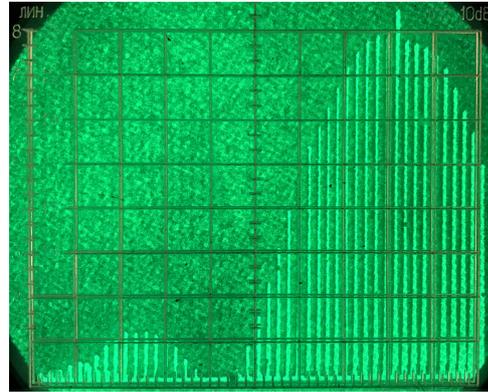


Рис. 20. Спектр периодических цугов гармонического сигнала; $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 50$ мкс, $\nu_0 = 40$ кГц, $m_x = 5$ кГц

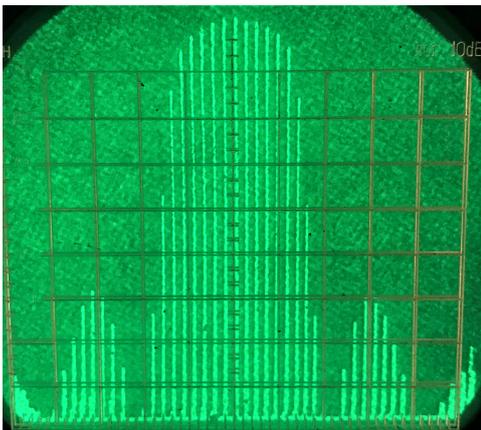


Рис. 18. Спектр периодических цугов гармонического сигнала; $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 100$ мкс, $\nu_0 = 25$ кГц, $m_x = 5$ кГц

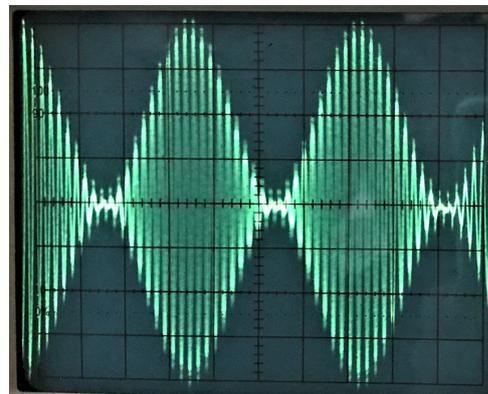


Рис. 21. Амплитудно-модулированный гармонический сигнал; $\nu_0 = 1$ кГц, $\nu = 25$ кГц, $m = 1$

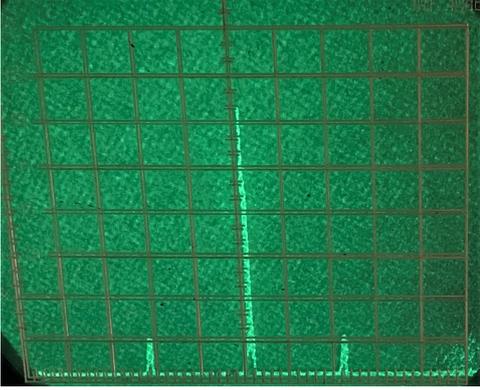


Рис. 22. Спектр амплитудно-модулированного гармонического сигнала; $\nu_0 = 1$ кГц, $\nu = 25$ кГц, $m = 0,43$

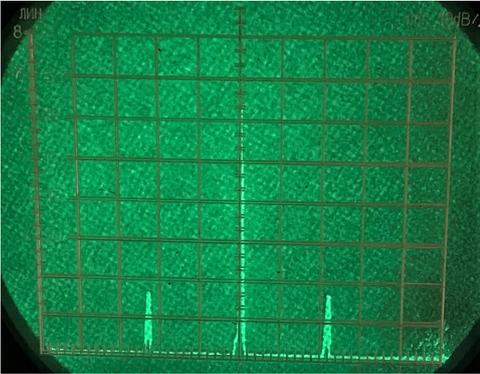


Рис. 23. Спектр амплитудно-модулированного гармонического сигнала; $\nu_0 = 1$ кГц, $\nu = 25$ кГц, $m = 0,67$

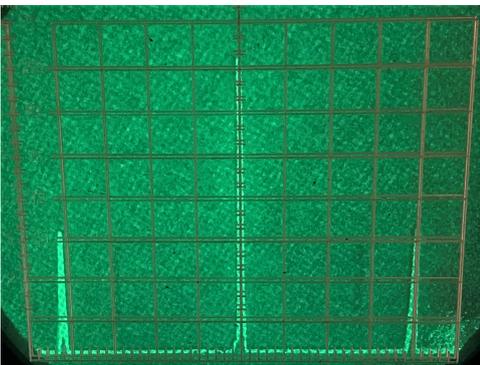


Рис. 24. Спектр амплитудно-модулированного гармонического сигнала; $\nu_0 = 2$ кГц, $\nu = 25$ кГц, $m = 1,00$