Вопрос 10. Принцип максимума и его следствия для уравнения теплопроводности в ограниченной области

Для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и заданного числа T обозначим через $Q_T \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \times (0,T]$ цилиндр с «нижним основанием» $S_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \Omega,\, t = 0\}$, «боковой поверхностью» $S \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega \times (0,T]$ и «верхней крышкой» $S_T \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x \in \Omega,\, t = T\}$. Через $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} S \cup \overline{S}_0$ обозначим так называемую «параболическую границу» цилиндра Q_T и заметим, что замыкание цилиндра $\overline{Q}_T = Q_T \cup \Gamma$. Символом $C^{2,1}_{x,t}(Q_T)$ обозначим анизотропное пространство непрерывно дифференцируемых функций, которые определены на замыкании $\overline{Q}_T$ и непрерывно дифференцируемы во всех внутренних точках Q_T , причем дважды по x и один раз по t.

В цилиндре Q_T рассмотрим непрерывное в замыкании $\overline{Q}_T$ классическое решение $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T)$ уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = 0, \quad (x,t) \in Q_T \,.$$

Теорема. *Классическое решение уравнения теплопроводности в цилиндре Q_T не принимает в Q_T значений, больших чем его наибольшее значение на Γ, или меньших чем его наименьшее значение на Γ, т.е. если $M \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{(x,t)\in\Gamma} u(x,t)$ и $m \stackrel{\text{def}}{=} \min\limits_{(x,t)\in\Gamma} u(x,t)$, то*

$$m \leqslant u(x,t) \leqslant M \quad \forall\,(x,t) \in Q_T \,.$$

Доказательство. Утверждение теоремы о минимуме сводится к утверждению теоремы о максимуме заменой функции u на $-u$, поэтому можно ограничиться доказательством утверждения теоремы только для случая максимума. Предположим, что утверждение теоремы о максимуме неверно, т.е. в Q_T найдется точка (x_0, t_0), в которой $u(x_0,t_0) > M$. Обозначив $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} u(x_0,t_0) - M > 0$, введем функцию

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{T-t}{T} \,.$$

Очевидно, $v(x,t) \leqslant u(x,t) + \frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall (x,t) \in \overline{Q}_T$. Поэтому

$$\begin{aligned} v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{T-t_0}{T} \geqslant u(x_0,t_0) = \\ = \varepsilon + M \geqslant \varepsilon + u(x,t) = \varepsilon + v(x,t) - \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{T-t}{T} \geqslant \\ \geqslant \varepsilon + v(x,t) - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + v(x,t) \quad \forall\,(x,t) \in \Gamma. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $v(x,t)$ принимает свое максимальное значение в некоторой внутренней точке цилиндра $(x_1,t_1) \in Q_T$ которая может, в частности, совпасть с (x_0,t_0). А тогда в этой точке должны выполняться условия $\frac{\partial v}{\partial x_k} = 0$, $\triangle v \leqslant 0$, $\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0$ (точнее, $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ в точке (x_1,t_1) в случае $t_1 < T$, либо $\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0$ в случае $t_1 = T$, когда возможен граничный экстремум). Поэтому в точке (x_1,t_1) имеем $\frac{\partial v}{\partial t} - \triangle v \geqslant 0$. С другой стороны,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \triangle v = \frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u - \frac{\varepsilon}{2T} = -\frac{\varepsilon}{2T} < 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Замечание. *Принцип максимума и соответствующие оценки решения имеют место для параболического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, как однородного, так и неоднородного, в том числе и в области, более общей чем цилиндр.*

Следствие 1. *Классическое решение первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в Q_T (т.е. с начальным условием при $t = 0$ и краевым условием Дирихле на границе $\partial\Omega$ при $t \in [0, T]$) единственно. Действительно, пусть имеются два решения u_1 и u_2 с одними и теми же начальными и граничными значениями на Γ. Тогда их разность $u_1 - u_2$ принимает нулевые значения на Γ и в силу теоремы эта разность тождественно нравна нулю в $\overline{Q}_T$, т.е.*

$$u_1 - u_2 \equiv \ 0 \Longrightarrow \ u_1 \equiv u_2 \quad \text{в } \overline{Q}_T \,.$$

Следствие 2. *Классическое решение первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности непрерывно зависит от начальных и граничных данных, заданных на Γ, т.е. на боковой поверхности и нижнем основании цилиндра Q_T. Это сразу же следует из неравенства*

$$\min_{(x,t)\in\Gamma} u(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant \max_{(x,t)\in\Gamma} u(x,t).$$

Действительно, пусть u_1 и u_2 — два решения уравнения теплопроводности в цилиндре Q_T с начальными и граничными данными $\varphi_1 \overset{\text{def}}{=} u_1|_\Gamma$ и $\varphi_2 \overset{\text{def}}{=} u_2|_\Gamma$, причем $|\varphi_1 - \varphi_2| < \varepsilon$, т.е. начальные и граничные данные разности $u_1 - u_2$, равные на Γ разности $\varphi_1 - \varphi_2$, удовлетворяют неравенствам $-\varepsilon < \varphi_1 - \varphi_2 < \varepsilon$. А тогда всюду в цилиндре Q_T имеем $-\varepsilon < u_1 - u_2 < \varepsilon$, т.е. $|u_1 - u_2| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.