Вопрос 12. Формулы Грина для оператора Лапласа, его симметричность с краевыми условиями Дирихле и Неймана, свойства его собственных чисел и собственных функций.

Первая и вторая формулы Грина.

Если ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет кусочно-гладкую границу $\partial\Omega$, а функции $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, то справедлива первая формула Грина

$$\int\limits_{\Omega} v \triangle u \, dx = -\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx + \int\limits_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds. \tag{1}$$

где ν — единичная внешняя нормаль. Действительно, используя формулу Остроградского–Гаусса, находим

$$\int\limits_{\Omega} v \triangle u \, dx = \int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(v \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big] \, dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx + \int\limits_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds.$$

Меняя местами функции u и v, получаем еще одну первую формулу Грина

$$\int\limits_{\Omega} u \triangle v \, dx = -\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, ds. \tag{2}$$

Вычитая из (2) из (1), получаем вторую формулу Грина

$$\int\limits_{\Omega} (v \triangle u - u \triangle v) \, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \Big(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big) \, ds.$$

Оператор Лапласа с краевыми условиями Дирихле и Неймана.

Рассмотрим оператор Лапласа $L = \triangle$ с областью определения

$$D_L \stackrel{\text{def}}{=} \{ u \in C^2(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0 \} \subset C(\overline{\Omega}) \tag{4}$$

с краевым условием Дирихле. Оператор Лапласа будем рассматривать как

$$L = \triangle : \; D_L \subset C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega}), \tag{5}$$

т.е. как действующий из $C(\overline{\Omega})$ в $C(\overline{\Omega})$. При этом пространство $C(\overline{\Omega})$ непрерывных в замыкании ограниченной области Ω функций рассматривается как предгильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} \, dx,$$

где черта означает комплексное сопряжение. Отметим, что скалярное произведение $(.\,,.)$ порождает на $C(\overline{\Omega})$ норму

$$\|u\| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \tag{6}$$

с которой пространство $C(\overline{\Omega})$ не будет полным. Пополнение пространства $C(\overline{\Omega})$ с этой нормой приводит к интегралу Лебега и пространству Лебега $L_2(\Omega)$. Однако рассматриваемые здесь свойства собственных чисел и собственных функций оператора Лапласа не требуют полноты пространства $C(\overline{\Omega})$.

Определение 1. *Оператор* $L\colon D_L \subset C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ *называют симметричным, если* $(Lu, v) = (u, Lv)\ \forall\, u, v \in D_L$.

Из второй формулы Грина следует, что оператор Лапласа (5) является симметричным.

Определение 2. *Нетривиальное решение* $u \in D_L$ *уравнения* $Lu = \lambda u$ *с некоторым числом* $\lambda \in \mathbb{C}$ *называют собственной функцией оператора* L*, а соответствующее* λ *называют его собственным числом.*

Лемма 1. *Собственное число оператора Лапласа (5) является вещественным.*

Доказательство. Действительно, пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное число оператора (5). Это означает существование нетривиального решения $u \in D_L$ уравнения $Lu = \lambda u$. А тогда

$$\lambda\|u\|^2 = \lambda(u, u) = (\lambda u, u) = (Lu, u) = (u, Lu) = (u, \lambda u) = \overline{\lambda}(u, u) = \overline{\lambda}\|u\|^2,$$

откуда в силу условия $\|u\| \neq 0$ следует равенство $\overline{\lambda} = \lambda$.

Лемма 2. *Собственные функции оператора Лапласа (5), соответствущие разным собственным числам, ортогональны.*

Доказательство. Действительно, пусть $u_1\,, u_2 \in D_L$ — собственные функции оператора Лапласа (5), соответствущие собственным числам $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда

$$\lambda_1(u_1\,, u_2) = (\lambda_1 u_1\,, u_2) = (Lu_1\,, u_2) = (u_1\,, Lu_2) = (u_1\,, \lambda_2 u_2) = \lambda_2(u_1\,, u_2),$$

откуда сразу же находим находим $(\lambda_1 - \lambda_2)(u_1\,, u_2) = 0 \implies (u_1\,, u_2) = 0$.