Вопрос 5. . . . Область зависимости. Область единственности . . . *

Определение 1. *Для однородного волнового уравнения в случае одной пространственной переменной областью зависимости решения $u = u(x, t)$ в точке $P(x, t)$ называется такой интервал на оси $t = 0$, что решение в точке $P(x, t)$ зависит от данных задачи, заданных только на этом интервале.*

Данные задачи — это данные Коши и заданные внешние силы. Формула Даламбера показывает, что решение задачи Коши для однородного волнового уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ зависит от значений начальных данных только на основании характеристического треугольника с вершиной в точке $P(t, x)$ — см. рисунок, где областью зависимости является интервал (c_1, c_2) оси $t = 0$, отсекаемый характеристиками $x - at = c_1$ и $x + at = c_2$, проведенными из точки $P(x, t)$ в сторону оси $t = 0$. Область зависимости часто определяют как интервал $(x - at, x + at)$ оси $t = 0$, что позволяет исключить использование постоянных c_1 и c_2 .

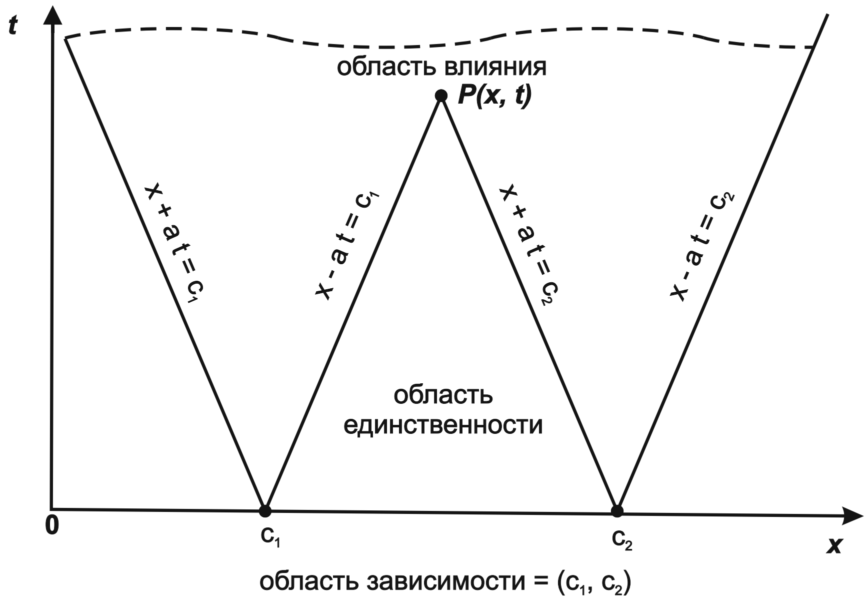

Рис. *Области зависимости, влияния и единственности.*

Свойства решений гиперболических уравнений:

1) Конечная область зависимости.

2) Конечная скорость распространения возмущений, равная значению $a > 0$ для волнового уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$.

Определение 2. *Областью влияния начальных данных, заданных на некотором интервале (c_1, c_2) оси $t = 0$, называют ту неограниченную область полуплоскости $t > 0$, в точках которой на решение влияют значения начальных данных, заданных в точках интервала (c_1, c_2) .*

*Задача Коши для волнового уравнения в случае одной пространственной переменной, принцип Дюамеля, формула Даламбера и непрерывнная зависимость решения от данных задачи достаточно подробно разбирались на лекциях. Ниже приводится дополнение к лекциям, касающееся области зависимости и области единственности. Эти простые, но важные вопросы «выпали» из лекций, а в учебниках они затрагиваются очень поверхностно и мимоходом.

Формула Даламбера показывает, что область влияния начальных данных, заданных на интервале (c_1, c_2) оси $t = 0$, ограничена самим интервалом (c_1, c_2) оси $t = 0$ и расходящимися характеристиками, проведенными вверх через концы интервала (c_1, c_2) — см. рисунок, где область влияния ограничена интервалом (c_1, c_2) и двумя характеристиками: $x + at = c_1$ и $x - at = c_1$.

Определение 3. *Для однородного волнового уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, выполняющегося на всей плоскости $t > 0$, областью единственности называют наибольшую область полуплоскости $t > 0$, в точках которой решение однозначно определено начальными данными на некотором интервале (c_1, c_2) оси $t = 0$.*

Формула Даламбера показывает, что решение задачи Коши для однородного волнового уравнения с начальными данными, заданными на интервале (c_1, c_2) оси $t = 0$, решение будет однозначно определено в характеристическом треугольнике с основанием (c_1, c_2) и вершиной $P(x, t)$ — см. рисунок, где область единственности является треугольником с основанием (c_1, c_2), концы которого соединяются с вершиной $P(x, t)$ отрезками двух характеристик: $x - at = c_1$ и $x + at = c_1$. Нетрудно убедиться, что требования к размерам области, в которой должно выполняться уравнение, можно значительно ослабить. А именно, достаточно предположить, что однородное или неоднородное волновое уравнение выполнятся в какой-либо области, содержащей указанный характеристический треугольник, и в частности, в области, совпадающей с характеристическим треугольником.