Вопрос 8. Понятие обобщенного (слабого) решения задачи Коши для волнового уравнения. Разрывные решения. Распространение разрывов.

Напомним, что классическим решением дифференциального уравнения в частных производных

$$\sum_{|\alpha|\leqslant\ell} a_\alpha D_x^\alpha u(x) = f(x), \quad x\in\Omega, \tag{1}$$

порядка $\ell \geqslant 1$ с постоянными коэффициентами a_α в области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 1$, называют функцию $u\in C^\ell(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (2) во всех точках $x\in\Omega$.

Обозначим через $\mathcal{R}_{loc}(\Omega)$ линейное пространство функций, локально ограниченных и локально интегрируемых по Риману в области Ω, т.е. ограниченных и интегрируемых по Риману на любом компакте[1] в Ω. Обобщеным (или слабым) решением уравнения (2) в области Ω будем называть функцию $u\in\mathcal{R}_{loc}(\Omega)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\sum_{|\alpha|\leqslant\ell}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)D_x^\alpha\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\,\varphi\in\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega), \tag{2}$$

где использовано обозначение $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ для линейного пространства функций, бесконечно дифференцируемых и финитных[2] в области Ω.

Проиллюстрируем понятие обобщенного (слабого) решения на примере волнового уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx}$ в случае одной пространственной переменной. Это проще сделать, переходя к характеристическим переменным $\xi=x-at$ и $\eta=x+at$, в которых волновое уравнение принимает простейший (канонический) вид $u_{\xi\eta}=0$. При этом обобщенное (или слабое) решение уравнения $u_{\xi\eta}=0$ определяется как функция $u\in\mathcal{R}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} u(\xi,\eta)\varphi_{\xi\eta}\,d\xi\,d\eta = 0 \quad \forall\,\varphi\in\overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^2). \tag{3}$$

Интересно, что общий вид решения уравнения $u_{\xi\eta}=0$ в обобщенной постановке (3) не отличается от его общего вида в классической постановке. Установить это фундаментальное свойство решений уравнения $u_{\xi\eta}=0$ можно было бы, например, рассматривая это уравнение в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, что, однако, выходит за рамки программы курса. Тем не менее, нетрудно убедиться в справедливости более слабого утверждения о том, что функция вида $u(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta)$ с любыми $f,g\in\mathcal{R}_{loc}(\mathbb{R})$ будет обобщенным (слабым) решением уравнения $u_{\xi\eta}=0$. При этом допускается, например, что функции f и g могут не иметь классической производной ни в одной точке $\mathbb{R}$. Точнее, справедлива следующая

Лемма. *Функция вида $u(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta)$ удовлетворяет интегральному тождеству* (3) *при любых заданных $f,g\in\mathcal{R}_{loc}(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Пусть $u(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta)$ с какими-либо $f,g\in\mathcal{R}_{loc}(\mathbb{R})$. Тогда имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} u(\xi,\eta)\varphi_{\xi\eta}\,d\xi\,d\eta = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(\xi)\varphi_{\xi\eta}\,d\xi\,d\eta + \int\limits_{\mathbb{R}^2} g(\eta)\varphi_{\xi\eta}\,d\xi\,d\eta \quad \forall\,\varphi\in\overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^2), \tag{4}$$

[1] Напомним, что компактами в $\mathbb{R}^n$ являются ограниченные замкнутые множества.

[2] Функцию u называют финитной в области Ω, если ее носитель $\operatorname{supp} u$ компактен в области Ω, что означает, в частности, выполнение равенства $u=0$ в некоторой окресности границы $\partial\Omega$.

Обозначив

$$F(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} f(\xi)\varphi_\xi \, d\xi, \quad G(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} g(\eta)\varphi_\eta \, d\eta \quad \forall\, \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^2),$$

и пользуясь (4), находим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} u(\xi,\eta)\varphi_{\xi\eta}\, d\xi\, d\eta = \int\limits_{\mathbb{R}} F'(\eta)\, d\eta + \int\limits_{\mathbb{R}} G'(\xi)\, d\xi = 0 \quad \forall\, \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^2), \tag{5}$$

поскольку $F, G \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R})$ при любом выборе функции $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Лемма доказана.

Возвращаясь от характеристических переменных ξ, η к исходным x, t, заметим, что функция $u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$ будет обобщенным (слабым) решением волнового уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ в смысле интегрального тождества

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} u(x,t)\big(\varphi_{tt} - a^2\varphi_{xx}\big)\, dx\, dt = 0 \quad \forall\, \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^2) \tag{6}$$

при любых заданных $f, g \in \mathcal{R}_{loc}(\mathbb{R})$. В частности, функции f и g могут быть кусочно непрерывно дифференцируемыми или даже просто кусочно непрерывными с разрывами первого рода. Пусть, например, функция f имеет разрыв в точке $C_1 \in \mathbb{R}$, а функция g — разрыв в точке $C_2 \in \mathbb{R}$. В таком случае все точки характеристик $x - at = C_1$ и $x - at = C_2$ будут точками разрыва обобщенного (слабого) решения $u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$, т.е. разрывы обобщенного (слабого) решения распространяются вдоль характеристик. Отметим, что разрывы самого решения или его первых производных принято называть сильными, тогда как слабыми называют разрывы вторых производных при условии непрерывности самого решения и его первых производных. $\square$

В заключение остановимся на задаче Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in Q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \times (0, \infty); \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{7}$$

В общем случае определение обобщенного (слабого) решения формулируется для функций, локально ограниченных и локально интегрируемых по Риману в замыкании $\overline{Q}$. При этом начальные условия входят в соответствующее интегральное тождество, а также «извлекаются» из него с помомощью леммы Дю Буа-Реймонда в случае, когда обобщенное (слабое) решение имеет классическую гладкость, так что для решений с классической гладкостью обобщенная постановка обязательно равносильна классической постановке. Однако, в простейшем случае обобщенных (слабых) решений, имеющих лишь слабые разрывы, можно упростить определение обобщенного (слабого) решения, предполагая только, что такое решение $u \in C^1(\overline{Q})$, удовлетворяет начальным условиям (7) и интегральному тождеству (6). На такие решения распространяется все вышесказанное о распространении разрывов.